Proba/stats. Probabilité 1 : simulation, tableau, diagramme et arbre

I/ Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition : On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont les résultats dépendent du hasard.

Exemple :

Le lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie, le tirage d'une carte dans un jeu sont des expériences aléatoires.

2/ Éventualité, issue

Définition : Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des **éventualités**.

L'ensemble des éventualités s'appelle l'**univers**, on le note Ω.

Exemples :

- On lance un dé. Il y a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- Les issues du lancer d'une pièce sont "pile" et "face".

3/ Événement

a/ Définition

Définition :

- Un **événement** est une partie de l'univers, c'est à dire un ensemble d'éventualités.
- On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.

Évènement particuliers :

- Ω s'appelle **l'événement certain**.
- $\emptyset$ s'appelle **l'événement impossible**.
- $\{a\}$ s'appelle **l'événement élémentaire** (il est formé d'une seule éventualité)

Exemples :

- On lance un dé. L'événement certain est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- Les 6 évènements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.
- "Obtenir 7" est un événement impossible.

II/ Simulation d'une expérience aléatoire

1/ Notion de simulation

Définition : Simuler une expérience, c'est choisir un modèle pour cette expérience.

Exemples :

1. On modélise le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée par le fait de choisir "PILE" avec une probabilité de 0.5 et "FACE" avec une probabilité de 0.5.
2. On modélise le lancer d'un dé équilibré (dit aussi non pipé) par le fait de choisir 1 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, 2 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, 3 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, 4 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, 5 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.
3. On modélise une embauche sans discrimination du fait du sexe par le fait de choisir une femme avec une probabilité de 0.5 et un homme avec une probabilité de 0.5.

2/ Simulation sur tableur

Sur tableur, la fonction ALEA() renvoie un nombre au hasard dans l'intervalle [0;1[et la fonction ENT() renvoie le plus grand nombre entier plus petit que le nombre. Ainsi :

la fonction =2*ALEA() renvoie un nombre au hasard **dans [0;1[.**

la fonction =2*ALEA()+1 renvoie un nombre au hasard **dans [1;3[.**

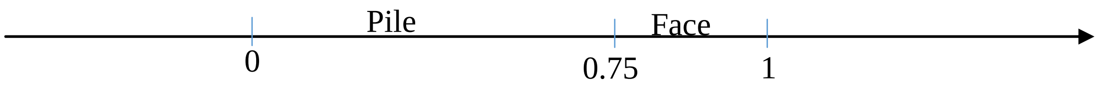
la fonction =ENT(2*ALEA()+1) renvoie un nombre au hasard **1 ou 2**.

On peut modéliser le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée par la formule =ENT(2*ALEA()+1).
alors l'issue "un PILE est obtenu" correspond à **1** , l'issue "un FACE est obtenu" à **2.**

Exemple 2 :

De même, **on peut modéliser le lancer d'un dé équilibré à 6 faces par la formule** =ENT(6*ALEA()+1).

Exemple 1 modifié :
On veut simuler le lancer d'une pièce de monnaie où la probabilité d'obtenir Pile est de 0.75.
Pour cela, on peut utiliser la formule : = SI(ALEA()<0,75;"Pile" ;"Face").



Prolongement :
Exemple 2 :
La formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) retourne un nombre aléatoire au hasard entre 1 et 6.

Elle permet, par exemple, de simuler le lancer d'un dé cubique équilibré.

3/ Simulation en langage Python

Propriété :
Dans le langage Python,

- Importer depuis la bibliothèque random, avec le code from random import * :
  - l'instruction ALEA() est remplacée par random().
  - l'instruction ALEA.ENTRE.BORNES(a;b) est remplacée par randint(a,b).
- Importer depuis la bibliothèque math, avec le code from math import * :
  - l'instruction ENT() l'est par floor().

Exemples :

- **On peut modéliser en python le lancer d'un dé (octaédrique) équilibré à 8 faces par** floor(8*random()+1).

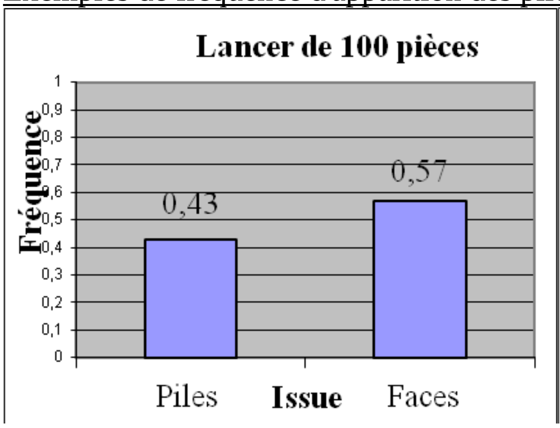
```
from random import *
from math import *
def simuler_de_octaedrique():
    return floor(8*random()+1)
```

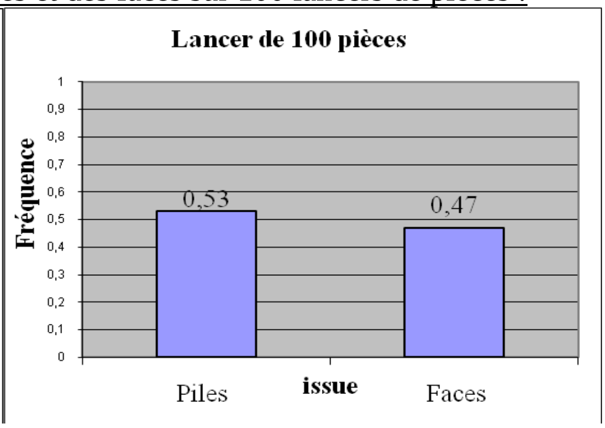
- **On peut modéliser en python le lancer d'un dé (icosaédrique) équilibré à 20 faces par** randint(1,20).

```
from random import *
def simuler_de_icosaedrique():
    return randint(1,20)
```

4/ Conclusions des simulations réalisées

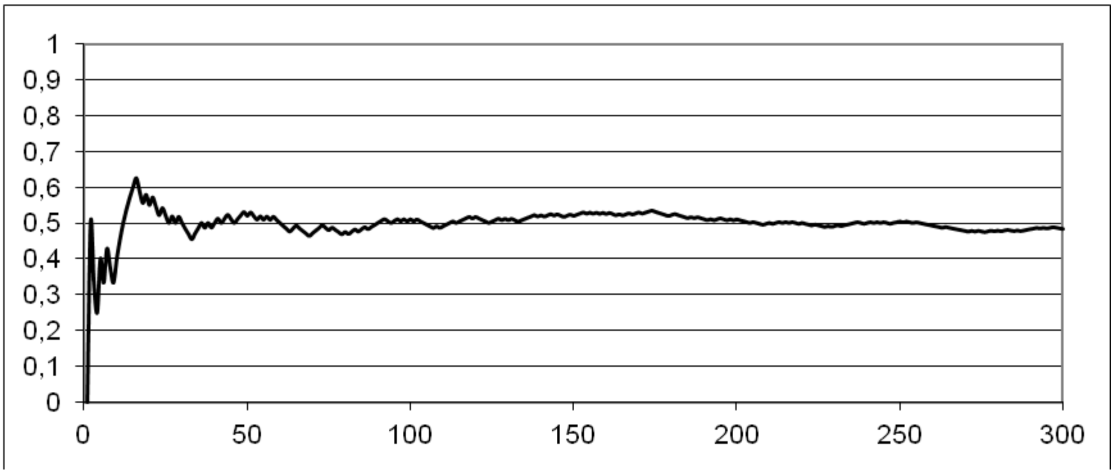
Exemples de fréquence d'apparition des piles et des faces sur 100 lancers de pièces :





Première conclusion : la distribution des fréquences observée sur chaque expérience varie : on dit qu'il y a une **fluctuation d'échantillonnage.**

Exemple de fréquence d'apparition des piles sur les n premiers lancers avec n variant de 1 à 300 :



Deuxième conclusion : si on réalise n fois la même expérience, la fréquence d'un événement varie de moins en moins quand n augmente : on dit qu'il y a une **stabilisation des fréquences**.

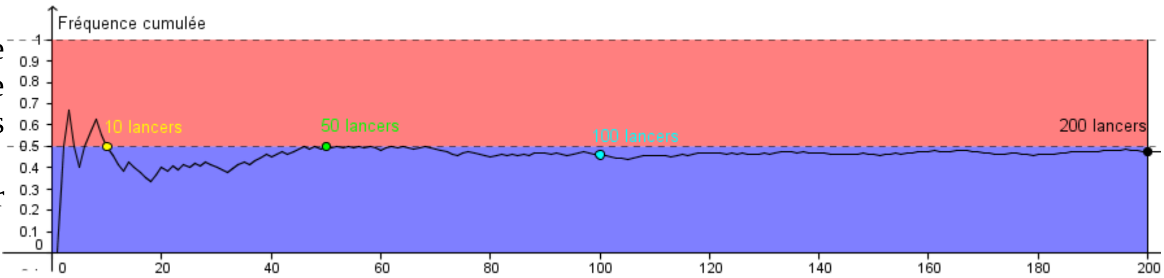
III/ Notion de probabilité

1/ Définition d'une probabilité

Théorème : (Loi des grands nombres)

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence d'apparition d'une issue x_i se **stabilise** vers un nombre p_i que l'on appelle **probabilité**.

Exemple : fréquence cumulée d'apparition de FACE sur 200 lancers d'une pièce équilibrée :
La probabilité d'obtenir FACE avec cette pièce est de ….



Comme les fréquences, les probabilités vérifient les propriétés suivantes :

Propriétés :

- Une probabilité est comprise entre 0 et 1 : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.
- La somme des probabilités vaut 1 : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Exemple : Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher).
On tire une boule de l'urne et on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On réalise cette expérience un grand nombre de fois, d'où :

	Fréquence observée			
nombre d'expérience n	100	1000	10000	100000
rouge	0,21	0,198	0,2001	0,20041
noire	0,28	0,307	0,3079	0,30234
verte	0,43	0,392	0,3962	0,39766
bleue	0,08	0,103	0,0958	0,09959

1/ Conjecturer la fréquence théorique vers laquelle tend la fréquence observée pour chaque issue de cette expérience.

issue	rouge	noire	verte	bleue
Fréquence théorique de stabilisation : probabilité	…	…	…	…

2/ Quelles propriétés vérifient ces probabilités ?

………

………

3/ Trouver le nombre de boules de chaque couleur.
Sur les 10 boules, il y a … boules rouges, … noires, … vertes et … bleue.

Exemples :

• On lance une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir "face" $\frac{1}{2}$.

• On lance un dé. La probabilité d'obtenir le nombre 3 est égale à $\frac{1}{6}$. $p(\{3\}) = \frac{1}{6}$

2/ Définition de la probabilité d'un événement

Définition :

Si $A = \emptyset$ alors $P(A) = P(\emptyset) = 0$.

Si $A = \Omega$ alors $P(A) = P(\Omega) = 1$.

Si $A \neq \emptyset$, alors la **probabilité de l'événement** A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent : si $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$, alors $P(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + p(\{a_3\}) + \ldots + p(\{a_k\})$.

Exemples :

- On lance un dé équilibré. Chaque face a la même probabilité d'apparaître : $\frac{1}{6}$.
- Soit A l'événement « obtenir un nombre impair ». $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

3/ Cas de l'équiprobabilité

Définition : On dit qu'il y a **équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété :

Dans le cas de l'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{n}$ où n est le nombre d'éventualités.

Si A est événement contenant k éventualités, alors $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Chaque tirage est équiprobable.

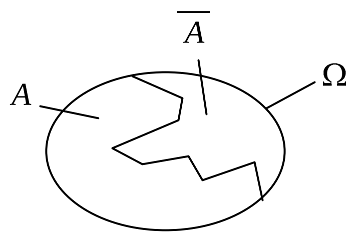
La probabilité de tirer le roi de trèfle est $\frac{1}{52}$.

La probabilité de tirer un trèfle est de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

IV/ Calculs d'une probabilité

1/ Vocabulaire sur les événements

Définition : L'**événement contraire** de l'événement A, noté $\overline{A}$, est l'événement composé des éventualités qui ne composent pas A.



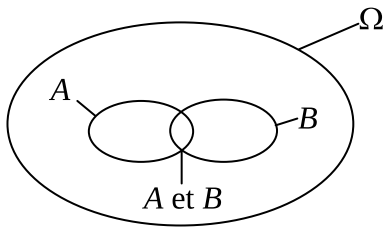
Exemple :

On lance un dé. L'événement A : "Obtenir un nombre impair" est $\{1 ; 3 ; 5\}$.

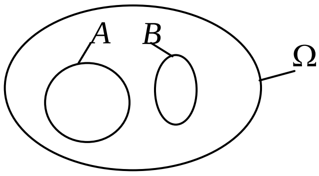
$\overline{A}$ est l'événement "Obtenir un nombre pair", c'est à dire $\{2 ; 4 ; 6\}$.

Définition : On appelle **événement "A et B"**, l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à A et à B simultanément.

L'événement « A et B » est l'intersection de deux événements : « A **et** B » = $A \cap B$.



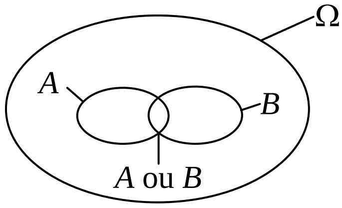
Exemple : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si l'événement A est"obtenir un as" et B est "obtenir une carte rouge", l'événement "A et B" est "Obtenir un as de cœur ou de carreau".



<u>Définition :</u> Deux **événements incompatibles** (ou disjoints) sont deux ensembles dont aucune éventualité ne réalise les deux événements. ("*A* et *B*" est vide).

<u>Exemple :</u>
Les événements *A* : "obtenir un nombre strictement inférieur à 3" $=\{1 ; 2\}$ et *B* : "Obtenir un nombre multiple de 3"$=\{3;6\}$ sont incompatibles car $\{1 ; 2\}\cap\{3 ; 6\}=\varnothing$.

<u>Définition :</u>
On appelle **événement "*A* ou *B*"**, l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à *A* ou à *B*.
L'événement « A et B » est la réunion de deux événements : « A ou B » $= A\cup B$.



<u>Exemple :</u> On tire une carte. *A* est l'événement "Obtenir un trèfle" et *B* celui "Obtenir un rouge". "*A* ou *B*" est l'événement "Obtenir un cœur, un carreau ou un trèfle".

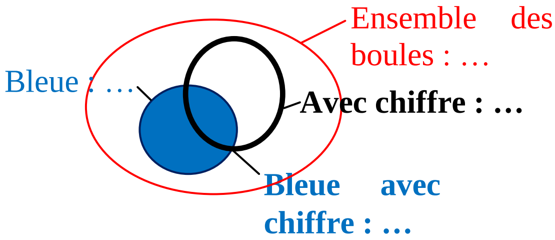
Soit *A* l'événement « obtenir un nombre impair ». $P(A)=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

<u>2/ Propriétés d'une probabilité</u>

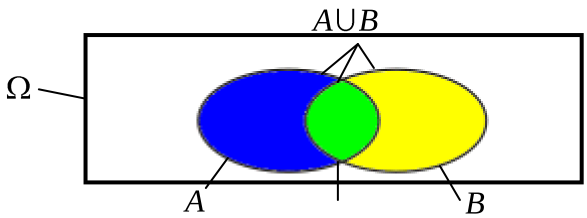
<u>Exemple introductif :</u>
Une urne contient 10 boules. Ces boules sont soit rouges ou bleues ; de plus elles portent soit un chiffre, soit rien.
On sait que l'urne contient 5 boules avec un chiffre et 4 boules rouges dont 2 avec un chiffre.
1/ Combien y-a-t-il de boules bleues ?
………
Il y a … boules bleues.
2/ Remplir le tableau suivant afin d'en déduire combien il y a de boules bleues portant un chiffre.

boules	Bleues	Rouges	Total
Avec chiffres			
Sans chiffres			
Total			

Il y a … boules bleues portant un chiffre.
3/ Remplir le diagramme suivant afin d'en déduire combien il y a de boules étant bleues ou portant un chiffre.
……………………………………………………………………………
Il y a … boules étant bleues ou portant un chiffre.



<u>Propriétés :</u>



- $P(\Omega)=1$.
- $P(\varnothing)=0$.
- Pour tout événement *A*, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- Pour tout événement *A* de Ω, $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- Si *A* est inclus dans *B*, alors $P(A)\leqslant P(B)$.
- Si *A* et *B* sont deux événements quelconques de Ω, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- Si *A* et *B* sont deux événements quelconques de Ω, alors $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

Exercice-type :
Dans un établissement de 2000 élèves, 19% des élèves sont en Terminale et 45% des terminales sont des garçons.
Le taux de réussite au Bac est de 85% et 33 garçons ont échoué au Bac.
On choisit au hasard un élève de Terminale.
On considère les événements : G = "l'élève de Terminale est un garçon" et R = "l'élève a réussi au Bac".
1/ Souligner la phrase qui signifie que l'on est dans le cas de l'équiprobabilité.
2/ a/ Calculer le nombre d'élèves de Terminale.

....

Il y a ….. élèves de Terminale.
b/ Calculer le nombre de garçons de Terminale.

....

Il y a ….. garçons en Terminale.
c/ Compléter le tableau suivant avec les effectifs.

	G	$\overline{G}$	Total
R			
$\overline{R}$			
Total			

3/ a/ Définir par une phrase l'événement $\overline{R}$.

....

b/ Calculer la probabilité de $\overline{R}$.

....

4/ a/ Définir par une phrase l'événement $G \cap \overline{R}$.

....

b/ Calculer la probabilité de $G \cap \overline{R}$.

....

5/ a/ Écrire à l'aide des événements G et R l'événement A = "l'élève est un garçon ou n'a pas réussi au Bac".

....

b/ Calculer la probabilité de cet événement A.

....

....

V/ Arbre de choix

Exemple concret :

Un couple désire avoir deux enfants et si possible "un garçon et une fille", dans un ordre quelconque !
On suppose qu'à chaque naissance, un enfant à une chance sur deux d'être un garçon ou une fille.
On désigne par M l'événement : "Avoir un garçon et une fille" et on s'intéresse à sa probabilité $P(M)$.

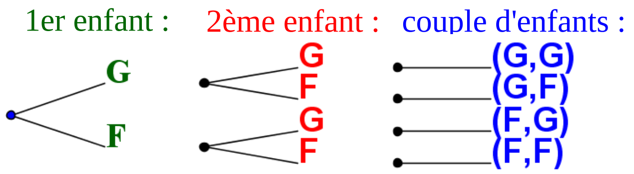
1/ Conjecture

Pensez-vous que l'on a plutôt $P(M)=\frac{1}{3}$ ou $P(M)=\frac{1}{2}$? $\mathbf{\frac{1}{2}}$

2/ Modélisation

On note F l'événement "avoir une fille" et G celui "avoir un garçon".
Pour figurer deux naissances successives, on peut utiliser un schéma comme ci-dessous où à l'extrémité de chaque branche (= trait), on place l'événement correspond au sexe de l'enfant né, tandis que l'on place à la fin l'issue correspondant au couple des enfants nés.
Par exemple, "un garçon puis une fille" est modélisé par :

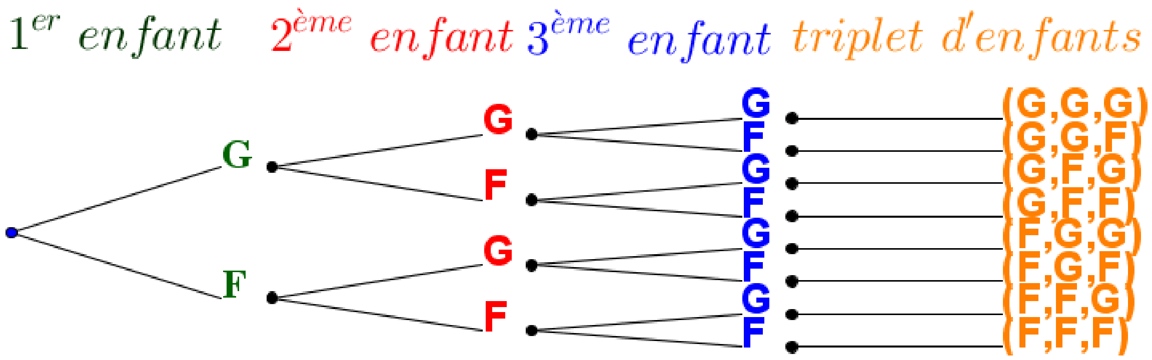
Pour déterminer l'ensemble des issues possibles, il suffit de tracer toutes les branches possibles, ce qui forme un arbre de choix.
Dans notre exemple, il y a deux choix possibles pour le premier enfant puis deux pour le second, d' où :



En analysant l'ensemble des issues possibles (couple d'enfants ici), on peut calculer la probabilité de M :
$P(M)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **car il y a deux issues à deux enfants de sexe différent sur les 4 issues possibles**.

3/ Extension à un couple souhaitant 3 enfants

Faire un arbre de probabilité modélisant la naissance de 3 enfants successifs :



En déduire la probabilité de l'événement N : "Les 3 enfants ne sont pas du même sexe".
$P(N)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ **car il y a 6 issues à deux enfants de sexe différent sur les 8 issues possibles**.