Exercices complémentaires sur les racines carrées

Rappels de cours :

● $\sqrt{a}$ est le nombre positif, qui élevé au carré donne a : Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$.

● a et b étant des nombres positifs, avec $b \neq 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$; $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

● a et b étant des nombres positifs non nuls, on a **toujours** : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 1 :

Calculer les nombres suivants et les écrire sous leur forme la plus simple : $A = \sqrt{7^2 + 1} \times \sqrt{2}$

$B = \dfrac{8\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$ $\quad C = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$ $\quad D = \sqrt{\dfrac{25+2}{48}}$ $\quad E = \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^2$ $\quad F = \sqrt{32} - 3\sqrt{162} + 4\sqrt{50} + 3\sqrt{128} - 10\sqrt{8}$.

Exercice 2 :

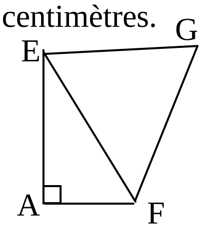
Calculer les nombres suivants et les écrire sous la forme $a + b \times \sqrt{c}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$: $A = \dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$;

$B = \left(\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63} + 2\sqrt{8}\right)$. $\quad C = \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 4\sqrt{500} - 5\sqrt{245}$

$D = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2$. A partir de ce calcul, déduire une écriture simplifiée à $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

Exercice 3 :

Soit AEF un triangle rectangle en A, dont les côtés [AE] et [AF] mesurent respectivement $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ centimètres.
Soit G un point distant à la fois de E de $2 \times \sqrt{10}$ centimètres et de F de $3 \times \sqrt{5}$ centimètres.
Déterminer la nature du triangle EFG.



Correction :

Exercice 1 :

$A = \sqrt{7^2 + 1} \times \sqrt{2} = \sqrt{49 + 1} \times \sqrt{2} = \sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

$B = \dfrac{8\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{4 \times 2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4 \times 2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{8\sqrt{6}}{3}}$.

$C = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{9 \times 3}}{\sqrt{4 \times 3}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$.

$D = \sqrt{\dfrac{25+2}{48}} = \sqrt{\dfrac{27}{48}} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \dfrac{\sqrt{9 \times 3}}{\sqrt{16 \times 3}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{3}}{\sqrt{16} \times \sqrt{3}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3}}{4 \times \sqrt{3}} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$.

$E = \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{8} + \left(\sqrt{8}\right)^2 = 2 + 2 \times \sqrt{16} + 8 = \mathbf{18}$.

$F = \sqrt{32} - 3\sqrt{162} + 4\sqrt{50} + 3\sqrt{128} - 10\sqrt{8} = \sqrt{16 \times 2} - 3\sqrt{81 \times 2} + 4\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{64 \times 2} - 10\sqrt{4 \times 2} = 4\sqrt{2} - 3 \times 9 \times \sqrt{2} + 4 \times 5 \times \sqrt{2} + 3 \times 8 \times \sqrt{2} - 10 \times 2 \times \sqrt{2} = \mathbf{\sqrt{2}}$.

Exercice 2 :

$A = \dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$. Variante : il est possible aussi de multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{5}$:

$A = \dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\sqrt{10} + \sqrt{5} \times \sqrt{2}\right) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10} \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{2} \times 5 + \sqrt{2} \times 5}{5} = \dfrac{2\sqrt{2} \times 5}{5} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.

$B = \left(\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63} + 2\sqrt{8}\right) = \left(\sqrt{4 \times 7} + \sqrt{7} - \sqrt{16 \times 2}\right)\left(\sqrt{9 \times 7} + 2\sqrt{4 \times 2}\right) = \left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7} + 4\sqrt{2}\right) = \left(3 \times \sqrt{7}\right)^2 - \left(4 \times \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \times 7 - 4^2 \times 2 = 63 - 32 = \mathbf{31}$.

$C = \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5} + 4\sqrt{100 \times 5} - 5\sqrt{49 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 4\sqrt{100} \times \sqrt{5} - 5\sqrt{49} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 3 \times 2 \times \sqrt{5} + 4 \times 10 \times \sqrt{5} - 5 \times 7 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 40\sqrt{5} - 35\sqrt{5}$
$= \mathbf{2\sqrt{5}}$.

$D = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = \mathbf{9 + 4\sqrt{5}}$. D'après l'égalité précédente, on a : $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2} = \mathbf{2 + \sqrt{5}}$ (car $2 + \sqrt{5}$ est positif).

Exercice 3 :

Comme AEF est rectangle en A, d'après le *théorème de Pythagore*, on a : $EF^2 = AE^2 + AF^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 = 2 + 3 = 5$.
Donc $EF = \sqrt{5}$.
D'une part, $EG^2 + EF^2 = (2 \times \sqrt{10})^2 + 5^2 = 4 \times 10 + 5 = 45$.
D'autre part $FG^2 = (3.\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$.
Ainsi dans le triangle EFG, on a la relation métrique $EG^2 + EF^2 = FG^2$.
D'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, on en déduit que le triangle **EFG est rectangle en E**.