Fonction. Nombre et calculs 2. Calculs numériques : puissances et racines carrées

I/ Puissance

Définition :

- Pour $n \in$ É : $\mathbf{10^n = 10 \times 10 \times \ldots \times 10}$, n est appelé **l'exposant**.
- Plus généralement :
  - $\boldsymbol{a^n = a \times a \times \ldots \times a}$ (n facteurs a)
  - a^n se lit " a exposant n".
  - Par convention $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Propriétés :

Pour tout réel a non nul, $n \in$ Î, $p \in$ Î :

- Exposant négatif : $\boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$ et $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.
- Opérations sur les puissances : $\boldsymbol{a^n \times a^p = a^{n+p}}$, $\boldsymbol{(a^n)^p = a^{n \times p}}$ et $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$.
- Même exposant : $\boldsymbol{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$ et $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$.

Exemples :

- Exposant négatif :
  - $3^{-1} = \frac{1}{3}$
  - $2^{-4} = \frac{1}{2^4} \left(= \frac{1}{16} \right)$.
- Opérations sur les puissances :
  - $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$ (= 256).
  - $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$ (= 4096).
  - $\frac{5^6}{5^9} = 5^{6-9} = 5^{-3} \left(= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \right)$.
- Même exposant :
  - $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3$ (= 1000).
  - $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} \left(= \frac{9}{16} \right)$

Propriété :

Un nombre est écrit en notation scientifique lorsqu'il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal supérieur ou égal à 1 et strictement inférieur à 10 et n est un nombre relatif.

Exemples :

$$4 \times 10^{6} = 4 \times \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{6 facteurs 10}} = 4\underbrace{000000}_{\text{6 zéros}}.$$

$$3 \times 10^{-5} = 3 \times \frac{1}{10^5} = \frac{3}{10^5} = 0.\underbrace{00003}_{\text{3 en 5}^{\text{ème}}\text{ position derrière la virgule}}$$

$$4.567 \times 10^{-9} = 0.\underbrace{000\ 000\ 004}_{\text{4 en 9}^{\text{ème}}\text{ position derrière la virgule, les décimales se plaçant encore derrière}}567.$$

II/ Racine carrée

Définition:

Soit a un nombre réel positif.

La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a.

Exemples :

- $\sqrt{9} = 3$ car $9 = 3^2$
- $\sqrt{49} = 7$ car $49 = 7^2$

Vous avez vu en troisième la liste des 12 premiers carrés parfaits non nuls :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

On obtient en lisant ce tableau précédent du bas vers le haut les premières racines carrées simplifiables en un nombre entier :

x	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{x}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Propriétés :

- Pour tout réel x positif ou nul, on a : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- Pour tout réel x **positif ou nul**, on a : $\sqrt{x^2} = x$.

Exemples :

- $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$
- $\sqrt{15^2} = 15$

Propriétés :

- Quels que soient les nombres réels positifs a et b, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Quels que soient les nombres réels positifs a et b, avec b non nul on a : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Intérêt :

Ces carrés permettent de simplifier l'écriture des racines carrées.

Méthode : décomposer un nombre sous forme d'un produit où apparaît un carré :

Exemples :

- $\sqrt{98} - \sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{49 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} - \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
  $= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
- $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{75}} = \dfrac{\sqrt{49 \times 3}}{\sqrt{25 \times 3}} = \dfrac{\sqrt{49} \times \sqrt{3}}{\sqrt{25}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$.

Autre intérêt :

Supprimer des radicaux au dénominateur.

Méthode : il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par la racine carrée se trouvant au dénominateur.

Exemples :

$\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels positifs **strictement positifs**. On a : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

<u>Démonstration sous forme d'exercice facultatif :</u>

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

1/ Justifier que $BC = \sqrt{a+b}$.

2/ Pourquoi $BC < AB + AC$?

3/ Conclure.