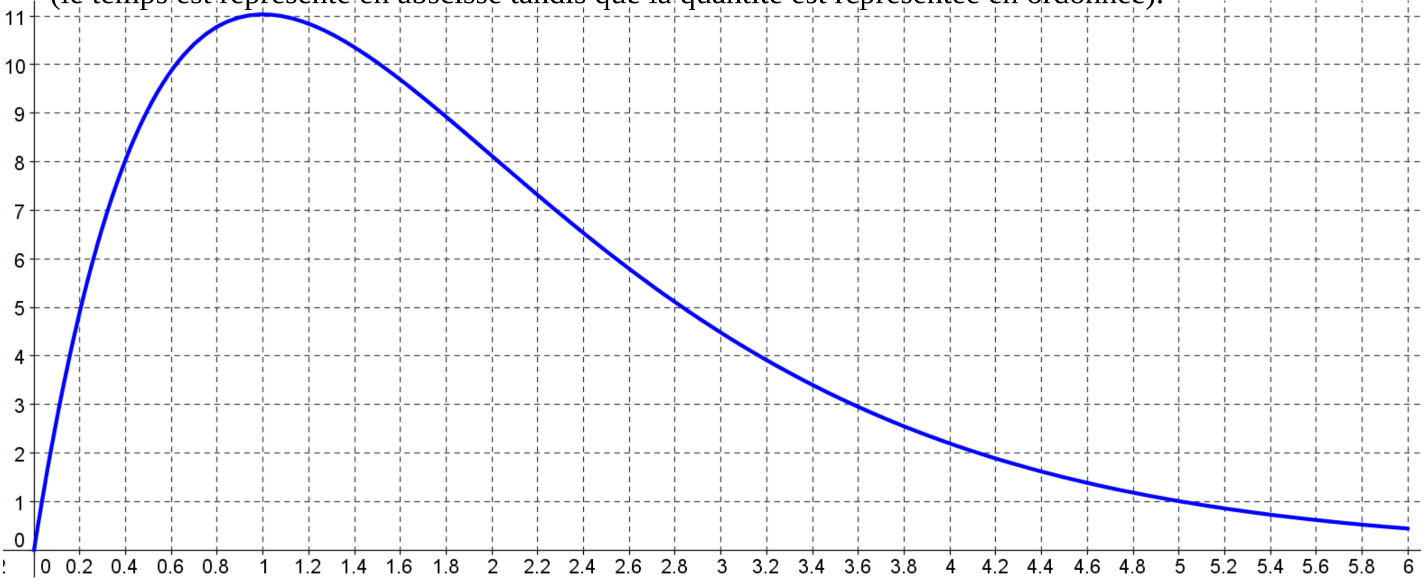
# Fonction. Fonction 2. Variations d'une fonction

## I/ Découverte des notions du chapitre

Lorsque l'on absorbe un médicament, la quantité de principe actif de ce médicament dans le sang évolue au cours du temps.
On nota $f$ la fonction qui au temps écoulé $t$ (en heure) depuis la prise de médicament associe la quantité de principe actif (en $mg.L^{-1}$) dans le sang sur les 6 premières heures.
La courbe représentant $f$ est donnée ci-dessous.
(le temps est représenté en abscisse tandis que la quantité est représentée en ordonnée).




### 1/ Décrire avec un texte

Les phrases suivantes décrivent l'évolution de la fonction tracée :
Lorsque le temps écoulé augmente :

- entre 0 $h$ et 1 $h$, la quantité de principe actif augmente : la fonction $f$ est croissante sur [0;1].
- entre 1 $h$ et 6 $h$, la quantité de principe actif diminue : la fonction $f$ est décroissante sur [1;6].
- La quantité maximale de principe actif dans le sang est de 11 $mg.L^{-1}$.
- cette quantité maximale est atteinte au bout de 1 $h$.

### 2/ Décrire avec l'algèbre

a/ Comparer les nombres suivants, c'est à dire écrire quel est le plus grand :

$f(0.2) \leqslant f(0.4)$ ; $f(2.4) \geqslant f(3.6)$ ; $f(0.6) \leqslant f(0.6.1)$ ; $f(3) \geqslant f(3.01)$.

b/ $a$ et $b$ désignent deux valeurs du temps entre 0 $h$ et 8 $h$ avec $a \leqslant b$.

- Si $a$ et $b$ sont deux temps appartenant à [0 ; 1], si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$ : l'ordre y est conservé.
- Si $a$ et $b$ sont deux temps appartenant à [1 ; 6], si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ : l'ordre y est inversé.

c/ Quels liens pouvez-vous faire entre la conservation de l'ordre et les variations de la fonction ?
Sur l'intervalle sur lequel la fonction est croissante, l'ordre est conservé.
Sur l'intervalle sur lequel la fonction est décroissante, l'ordre est inversé.

### 3/ Décrire avec un tableau

Compléter le tableau ci-contre :

- en précisant dans la première ligne les valeurs du temps où les variations changent et les bornes de l'étude.
- en symbolisant les variations par des flèches et en précisant les valeurs extrêmes obtenues.

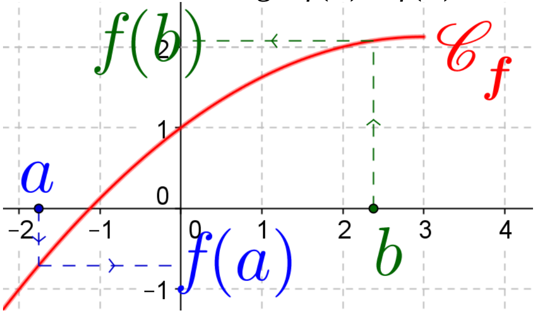
| $t$ | 0 | | 1 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 0 | $\nearrow$ | 11 | $\searrow$ | 0.5 |

## II/ Variations et extremum

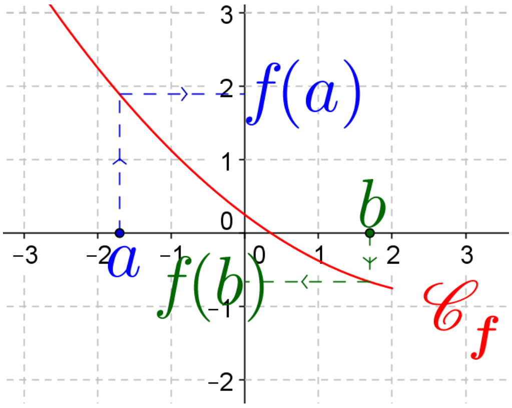
### 1/ Sens de variation

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

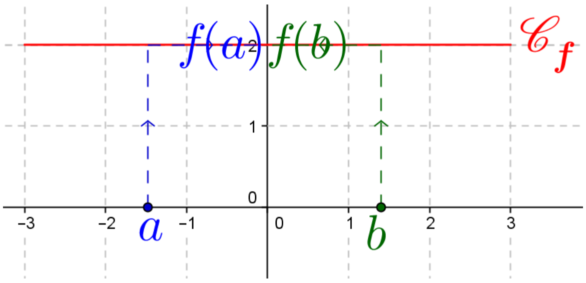
- Dire que $f$ est **croissante sur I** revient à dire que pour tous réels $a$ et $b$ de I : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
  Une telle fonction **conserve l'ordre** : les images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que $a$ et $b$.



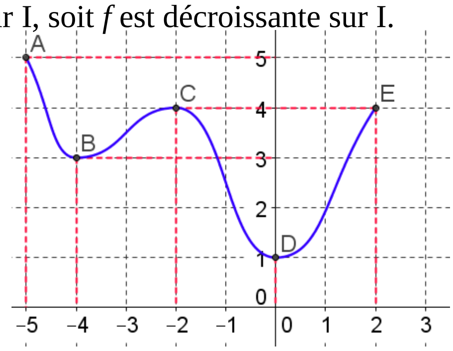

- Dire que $f$ est **décroissante sur I** revient à dire que pour tous réels $a$ et $b$ de I : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
  Une telle fonction **renverse l'ordre** : les images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de $a$ et $b$.




- Dire que $f$ est **constante sur I** revient à dire que pour tous réels $a$ et $b$ de I on a : $f(a) = f(b)$.
  Cela revient à l'existence d'un réel $k$ tel que pour tout réel $x$ de I on a $f(x) = k$.




- Dire que $f$ est **monotone sur I** revient à dire que $f$ est soir croissante sur I, soit $f$ est décroissante sur I.



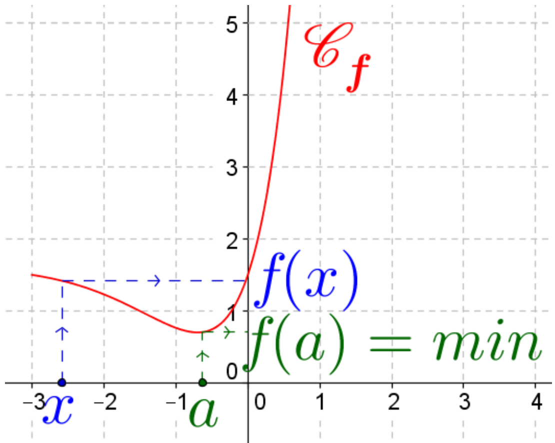

**Exemple :**
Soit $f$ la fonction définie par la courbe ci-contre :

- $f$ est monotone sur [-4;-2] (car $f$ y est croissante),
- $f$ est monotone sur [-2;0] (car $f$ y est décroissante)
- $f$ n'est monotone sur [-4;0] (car $f$ y change de variations)

### 2/ Extremum :

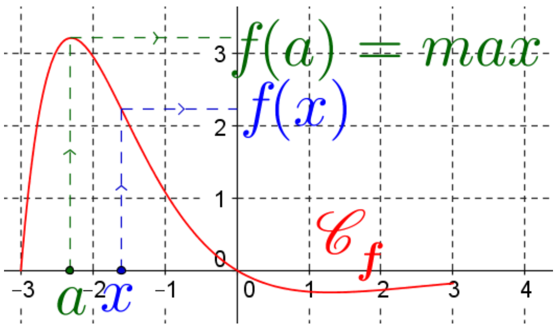
**Définition :**

$f$ est une fonction, I un intervalle inclus dans son domaine de définition et $a$ un réel de I.




- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de $f$ sur I signifie que $f(a)$ est la **plus petite valeur** de la fonction : pour tout réel $x$ de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de $f$ sur I signifie que $f(a)$ est la **plus grande valeur** de la fonction : pour tout réel $x$ de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

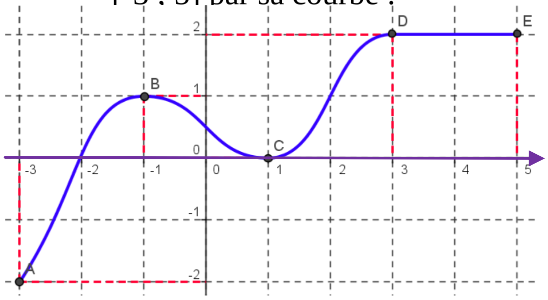



- Un extremum de $f$ sur I est soit un minimum soit un maximum

## 3/ Tableau de variation :

Exemple :

- fonction $f$ définie sur [-3 ; 5] par sa courbe :




- sens de variation de $f$ :
La fonction $f$ est :
- croissante sur [-3 ; -1] ;
- décroissante sur [-1 ; 1] ;
- croissante sur [1 ; 3] ;
- constante sur [3;5].

- Tableau de variation de $f$
On résume les informations obtenues dans un tableau :

| $x$ | -3 | | -1 | | 1 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | | | | 2 | → | 2 |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | | |
| | -2 | | | | 0 | | | | |

**Exercice-type :**

Voici le tableau de variations d'une fonction $f$ :

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | $2$ | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | | | | 4 | | |
| $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |
| | 1 | | | | -1 | | | | 2 |

1/ Quel est l'ensemble de définition de $f$ ? [-3;5].

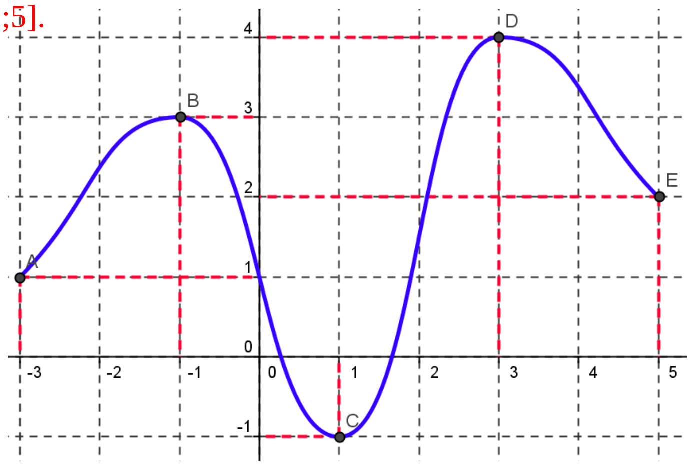
2/ Décrire le sens de variation de $f$ sur $[-1\,;2]$ :
La fonction $f$ est strictement décroissante sur [-1;1] et est croissante sur [1;2].

3/ Le minimum de $f$ sur [-3;5] est -1 atteint en $x = 1$.
Le maximum de $f$ sur $[-3\,;1]$ est 3 atteint en $x = -1$.

| $x$ | -3 | | $-1$ | 0 | 1 | | 3 | $\pi$ | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | | | | 4 | $f(\pi)$ | | |
| $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | $f(4)$ | |
| | 1 | | | | -1 | | | | | 2 |

4/ Comparer $f(\pi)$ et $f(4)$.
$\pi$ <4 donc $f(\pi) > f(4)$ car $f$ est strictement décroissante sur [3;5].

5/ Tracer une courbe $\mathscr{C}$ susceptible de représenter la fonction $f$ :




6/ Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ si $0 \leqslant x \leqslant \pi$ :
Le minimum de $f$ sur [0;π] est -1 et le maximum de $f$ sur [0;π] est 4. Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant \pi$ alors $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

7/ Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si l'on ne peut pas décider en justifiant :

a/ $f(-2) < 0$ :
Faux car le minimum de $f$ sur [-3;-1] est 1.

b/ $f(1.5) < f(2.5)$ :
Vrai car $f$ est croissante sur [1 ; 3].

c/ $f(-2) < f(4)$ :
On ne peut pas savoir car $f$ n'est pas monotone sur [-2;4].

| $x$ | -3 | -2 | $-1$ | | 1 | 1.5 | 2.5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | | | | $f(2.5)$ | 4 | | |
| $f$ | | $f(-2)$ ↗ | | ↘ | | $f(1.5)$ ↗ | | | $f(4)$ ↘ | |
| | 1 | | | | -1 | | | | | 2 |