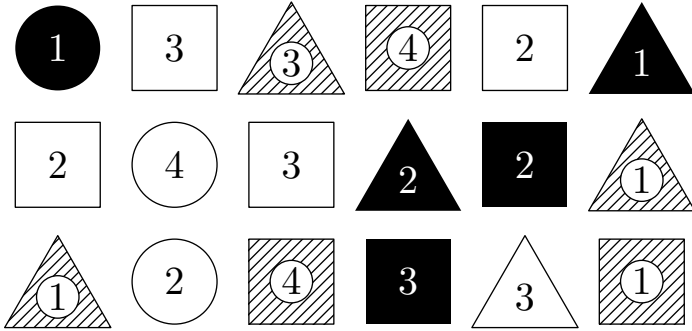


Variables aléatoires 1

Exercice 1

Une urne contient 18 pièces de bois de formes, de couleurs et portant des numéros différents.



On tire au hasard un élément de cette urne. On suppose que le tirage s'effectue de manière équiprobable.

On considère les événements suivants :

- A : "la pièce est un triangle"
- B : "la pièce est de couleur blanche"
- C : "la pièce porte le numéro 2"
- D : "la pièce n'est pas un cercle"
- E : "la pièce porte un numéro pair"

Sans justification, donner la probabilité des événements suivants :

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| a. $\bar{A}$ | b. $A \cap C$ | c. $(C \cap B) \cup A$ |
| d. $\overline{A \cap C}$ | e. $\bar{A} \cap \bar{D}$ | f. $(A \cap E) \cup (C \cap D)$ |
| g. $C \cap \bar{E}$ | h. $C \cup D$ | i. $\bar{A} \cup \bar{C}$ |

Correction 1

Une video est accessible

- a. $\mathcal{P}(\bar{A}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
- b. $\mathcal{P}(A \cap C) = \frac{1}{18}$
- c. $\mathcal{P}[(C \cap B) \cup A] = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$
- d. $\mathcal{P}(\overline{A \cap C}) = 1 - \mathcal{P}(A \cap C) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$
- e. $\mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{D}) = \frac{3}{18}$
- f. $\mathcal{P}[(A \cap E) \cup (C \cap D)] = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$
- g. $\mathcal{P}(C \cap \bar{E}) = 0$
- h. $\mathcal{P}(C \cup D) = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$
- i. $\mathcal{P}(\bar{A} \cup \bar{C}) = \frac{17}{18}$

Exercice 2*

On définit l'ensemble $\{\mathcal{X} \leq 2\}$ comme l'ensemble des événements élémentaires prenant une valeur inférieure ou égale à 2 :

$$\{\mathcal{X} \leq 2\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq 2\}$$

Dans le cas Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\{\mathcal{X} \leq 2\} = \{\mathcal{X} = 0\} \cup \{\mathcal{X} = 1\} \cup \{\mathcal{X} = 2\}$$

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant les valeurs entières de 1 à 6 et dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X} = x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	

1. Compléter le tableau de la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
 - a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 3)$
 - b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 3)$

Correction 2

1. Pour que ce tableau présente une loi de probabilité, il faut que la somme des probabilités des événements élémentaire vale 1. Ainsi, le nombre a vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 0,05 + 0,12 + 0,15 + 0,23 + 0,17 + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 6) &= 1 \\
 0,72 + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 6) &= 1 \\
 \mathcal{P}(\mathcal{X} = 6) &= 1 - 0,72 \\
 \mathcal{P}(\mathcal{X} = 6) &= 0,28
 \end{aligned}$$

Voici le tableau complété :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X} = x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	0,28

2. a. On a :

$$\{\mathcal{X} \leq 3\} = \{\mathcal{X} = 1\} \cup \{\mathcal{X} = 2\} \cup \{\mathcal{X} = 3\}$$
 Ceci étant une réunion d'événements disjoints entre eux :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 3) &= \mathcal{P}(\mathcal{X} = 1) + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 2) + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 3) \\
 &= 0,05 + 0,12 + 0,15 \\
 &= 0,32
 \end{aligned}$$
- b. On a :

$$\{\mathcal{X} > 3\} = \{\mathcal{X} = 4\} \cup \{\mathcal{X} = 5\} \cup \{\mathcal{X} = 6\}$$
 On en déduit la probabilité suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\mathcal{X} > 3) &= \mathcal{P}(\mathcal{X} = 4) + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 5) + \mathcal{P}(\mathcal{X} = 6) \\
 &= 0,23 + 0,17 + 0,28 \\
 &= 0,68
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

donnée ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} < 2)$

c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\} \cup \{\mathcal{X}=3\})$

Correction 3

Une video est accessible

1. Ce tableau représente une loi de probabilité car toutes ces valeurs sont des nombres appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ et car :

$$0,15 + 0,24 + 0,35 + 0,26 = 1$$

2. a. On a : $\{\mathcal{X} \geq 2\} = \{\mathcal{X}=2\} \cup \{\mathcal{X}=3\}$
où les événements $\{\mathcal{X}=2\}$ et $\{\mathcal{X}=3\}$ sont disjoints.

On en déduit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2) = 0,35 + 0,26 = 0,61$$

b. On a : $\{\mathcal{X} < 2\} = \{\mathcal{X}=0\} \cup \{\mathcal{X}=1\}$
où les événements $\{\mathcal{X}=0\}$ et $\{\mathcal{X}=1\}$ sont disjoints

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} < 2) = 0,15 + 0,24 = 0,39$$

3. Les événements $\{\mathcal{X}=1\}$ et $\{\mathcal{X}=3\}$ sont disjoints :
 $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\} \cup \{\mathcal{X}=3\}) = 0,24 + 0,26 = 0,5$

Exercice 4

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5€.
- la face "1" rapporte 2€.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1€.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{2}{6}$

☐ $\frac{3}{6}$

☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$.

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{2}{6}$

☐ $\frac{3}{6}$

☐ $\frac{4}{6}$

Correction 4

Une video est accessible

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5€.
- la face "1" rapporte 2€.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1€.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$

☒ $\frac{2}{6}$

☐ $\frac{3}{6}$

☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$.

☐ $\frac{1}{6}$

☒ $\frac{2}{6}$

☐ $\frac{3}{6}$

☐ $\frac{4}{6}$