Somme des temes d'une suite

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des questions, donner le nombre de termes composant la somme :

a. $u_0+u_1+\cdots+u_{32}$

b. $u_5+u_6+\cdots+u_{15}$

c. $u_0+u_1+\cdots+u_n$

d. $u_5+u_6+\cdots+u_n$

e. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{100}$

f. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_n$

g. $u_0+u_2+\cdots+u_{88}$

h. $u_{3k}+u_{3k+3}+\cdots+u_{99}$

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{64} u_k$

j. $\displaystyle\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$

Correction 1

a. $u_0+u_1+\cdots+u_{32}$
Cette somme comporte : $32-0+1=33$ termes

b. $u_5+u_6+\cdots+u_{15}$
Cette somme comporte : $15-5+1=11$ termes

c. $u_0+u_1+\cdot+u_n$
Cette somme comporte $n{+}1$ termes.

d. $u_5+u_6+\cdots+u_n$
Cette somme comporte $n{-}4$ termes.

e. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{100}$
Cette somme comporte $101{-}k$ termes.

f. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_n$
Cette somme comporte $n{-}k{+}1$ termes.

g. La somme :
$u_0+u_2+\cdots+u_{88}$
peut s'écrire :
$u_{2\times 0}+u_{2\times 1}+\cdots+u_{2\times 44}$
Cette somme comporte 45 termes.

h. La somme :
$u_{3k}+u_{3k+3}+\cdots+u_{99}$
peut s'écrire :
$u_{3k}+u_{3(k+1)}+\cdots+u_{3\times 33}$
Cette somme comporte $34{-}k$ termes.

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{64} u_k$: cette somme comporte 65 termes.

j. $\displaystyle\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$: cette somme comporte 12 termes.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{4}$. Déterminer la somme S définie par :
$S=u_{11}+u_{12}+\cdots+u_{25}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 12 et de raison $-\sqrt{3}$. Déterminer la somme S' définie par :
$S'=v_5+v_6+\cdots+v_{13}$

Correction 2

1. S est la somme de 15 termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{4}$.

Calculons le premier terme et le dernier terme de cette somme :

- $u_{11}=u_0+11{\cdot}r=2+11\times\frac{1}{4}=\frac{19}{4}$
- $u_{25}=u_0+25{\cdot}r=2+25\times\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$

Ainsi, la somme de ces termes est égale à :

$$S=u_{11}+\cdots+u_{25}=\frac{(u_{11}+u_{25})\times 15}{2}$$
$$=\frac{\left(\frac{19}{4}+\frac{33}{4}\right)\times 15}{2}=\frac{\frac{52}{4}\times 15}{2}=\frac{195}{2}$$

2. La somme S' est la somme de 9 termes de la suite arithmétique (v_n) de premier terme 12 et de raison $-\sqrt{3}$.

Calculons le premier et le dernier terme de la somme S' :

- $v_5=v_0+5{\cdot}r=12+5\times\left(-\sqrt{3}\right)=12-5\sqrt{3}$
- $v_{13}=v_0+13{\cdot}r=12+13\times\left(-\sqrt{3}\right)=12-13\sqrt{3}$

Ainsi, la somme S' vaut :

$$S'=v_5+\cdots+v_{13}=\frac{(v_5+v_{13})\times 9}{2}$$
$$=\frac{\left(12-5\sqrt{3}+12-13\sqrt{3}\right)\times 9}{2}=\frac{\left(24-18\sqrt{3}\right)\times 9}{2}$$
$$=9\times\left(12-9\sqrt{3}\right)$$

Exercice 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a la propriété :

$$u_k+u_{k+1}+\cdots+u_n=\frac{\overbrace{(n{-}k{+}1)}^{\text{Nombres de termes}}\cdot(\overset{\text{Premier terme}}{u_k}+\overset{\text{Dernier terme}}{u_n})}{2}$$

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison 2. Déterminer la valeur de la somme :
$S=u_0+u_1+\cdots+u_{34}$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $v_n=2-3{\cdot}n$
Déterminer la valeur de la somme :
$S'=v_4+v_5+\cdots+v_{15}$

Correction 3

1. La suite (u_n) étant arithmétique de premier terme 3 et de raison 2, le terme de rang 34 a pour valeur :
$u_{34}=u_0+34\times r=3+34\times 2=3+68=71$

La suite (u_n) étant arithmétique, on a la relation :

$$S = u_0 + \cdots + u_{34} = \frac{(34-0+1)\cdot(u_0+u_{34})}{2}$$
$$= \frac{35\cdot(3+71)}{2} = \frac{35\times 74}{2} = 35\times 37 = 1295$$

2. De l'expression des termes de la suite (v_n) :
$v_n = 2 - 3\cdot n$
$v_n = 2 + (-3)\cdot n$
on en déduit que la suite (v_n) est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -3.

On a les deux termes de la suite (v_n) :
- $v_4 = 2 + 4\times(-3) = 2 - 12 = -10$
- $v_{15} = 2 + 15\times(-3) = 2 - 45 = -43$

L'expression de la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'expression la somme S' :
$$S' = \frac{(15-4+1)\cdot(v_4+v_{15})}{2} = \frac{12\times\big[(-10)+(-43)\big]}{2}$$
$$= 6\times(-53) = -318$$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On note S la somme des $n{+}1$ premiers termes de la suite (u_n). On a :
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 2. Déterminer la somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n naturel par :
$v_n = \dfrac{5}{2^n}$
Déterminer la somme S' des 20 premiers termes de la suite (v_n).

3. On considère la somme S'' définie par :
$S'' = 27 + 9 + 3 + \cdots + \dfrac{1}{81}$
Déterminer la valeur de S''.

Correction 4

1. La somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n) a pour valeur :
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = u_0\cdot\frac{1-q^{100}}{1-q} = 2\times\frac{1-2^{100}}{1-2}$$
$$= 2\times\frac{1-2^{100}}{-1} = 2\cdot\big(2^{100}-1\big)$$

2. Pour tout entier naturel n, on a la relation :
$$v_n = \frac{5}{2^n} = 5\times\frac{1}{2^n} = 5\times\frac{1^n}{2^n} = 5\times\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$
On reconnait l'expression des termes de la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) a pour valeur :
$$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{19} = u_0\cdot\frac{1-q^{20}}{1-q} = 5\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{20}}{1-\dfrac{1}{2}}$$
$$= 5\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{20}}{\dfrac{1}{2}} = 5\times 2\cdot\Big[1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{20}\Big] = 10\cdot\Big[1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{20}\Big]$$

3. Les premiers termes de la somme S'' permettent de reconnaître les termes sucessifs de la suite (w_n) géométrique de premier terme 27 et de raison $\dfrac{1}{3}$.
La formule explicite d'une suite géométrique permet d'obtenir l'expression des termes w_n en fonction du rang n :
$$w_n = 27\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^n$$
Déterminons le rang n du terme ayant pour valeur :
$$w_n = \frac{1}{81}$$
$$27\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1}{81}$$
$$3^3\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1}{3^4}$$
$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1}{3^3}\times\frac{1}{3^4}$$
$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1}{3^7}$$
$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \frac{1^7}{3^7}$$
$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \Big(\frac{1}{3}\Big)^7$$
On en déduit : $n{=}7$
Ainsi, la somme S'' s'exprime par :
$$S'' = w_0 + w_1 + \cdots + w_7 = w_0\cdot\frac{1-q^8}{1-q} = 27\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^8}{1-\dfrac{1}{3}}$$
$$= 27\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^8}{\dfrac{2}{3}} = 27\times\frac{3}{2}\times\Big[1-\Big(\frac{1}{3}\Big)^8\Big] = \frac{81}{2}\cdot\Big[1-\Big(\frac{1}{3}\Big)^8\Big]$$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a la propriété :
$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \overset{\text{Premier terme}}{\overset{\downarrow}{u_k}}\cdot\frac{1-q^{\overset{\text{Nombre de termes}}{\overset{\downarrow}{n-k+1}}}}{1-q}$$

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 3. Déterminer la valeur de la somme :
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$$

2. On considère la suite (v_n) dont le terme de rang n, un entier naturel $(n \in \mathbb{N})$, est définie par : $v_n = \dfrac{3}{4^n}$

Déterminer la valeur de la somme S' :
$$S' = v_5 + v_6 + \cdots + v_{12}$$

Correction 5

1. La somme des termes d'une suite arithmétique permet d'exprimer la somme S :
$$S = u_0 \cdot \frac{1-q^{9-0+1}}{1-q} = 4 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 4 \cdot \frac{1-3^{10}}{-2}$$
$$= -2 \cdot \left(1-3^{10}\right) = 2 \cdot \left(3^{10}-1\right)$$

2. Considérons la suite (v_n) dont les termes s'expriment en fonction de n par :
$$v_n = \frac{3}{4^n} = 3 \times \frac{1}{4^n} = 3 \times \frac{1^n}{4^n} = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
On reconnait l'expression des termes de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

Le terme de rang 5 a pour expression :
$$v_5 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{3}{4^5}$$
La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique s'exprime par :
$$S' = v_5 + v_6 + \cdots + v_{12} = v_5 \cdot \frac{1-q^{12-5+1}}{1-q} = \frac{3}{4^5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^8}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{3}{4^5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^8}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4^5} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^8\right] = \frac{1}{4^4} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^8\right]$$

Exercice 6

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\dfrac{2}{3}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   - b. Déterminer le rang de la suite (u_n) ayant pour valeur 38.
   - c. Déterminer la somme des termes :
   $$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}.$$

2. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 4 et de raison $\dfrac{2}{3}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   - b. Déterminer la somme des termes :
   $$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}.$$

Correction 6

1. a. Voici les trois premiers termes de la suite (u_n) :
   - $u_0 = 4$
   - $u_1 = u_0 + \dfrac{2}{3} = 4 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{12}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
   - $u_2 = u_1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{3}$

   b. Le terme de rang n de la suite (u_n) de premier terme 4 et de raison $\dfrac{2}{3}$ admet pour expression en fonction de n :
   $$u_n = 4 + \frac{2}{3} \times n$$
   Ainsi, le terme ayant pour valeur 38 vérifie la relation :
   $$u_n = 38$$
   $$4 + \frac{2}{3} \times n = 38$$
   $$\frac{2}{3} \times n = 38 - 4$$
   $$\frac{2}{3} \times n = 34$$
   $$n = 34 \times \frac{3}{2}$$
   $$n = 17 \times 3$$
   $$n = 51$$
   Le rang de terme 51 a pour valeur 51.

   c. Le terme de rang 99 a pour valeur :
   $$u_99 = 4 + 99 \times \frac{2}{3} = 4 + 33 \times 2 = 4 + 66 = 70$$
   La somme S est la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n). La somme des termes d'une suite arithmétique s'exprime par :
   $$S = \frac{100 \times \left(u_0 + u_{99}\right)}{2} = 50 \times \left(4 + 70\right) = 50 \times 74 = 3700$$

2. a. Les trois premiers termes de la suite (v_n) ont pour valeur :
   - $v_0 = 4$
   - $v_1 = v_0 \times \dfrac{2}{3} = 4 \times 23 = \dfrac{8}{3}$
   - $v_2 = v_1 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{9}$

   b. La somme S' est la somme des 16 premiers termes de la suite (v_n). La somme des termes d'une suite géométrique s'exprime par :
   $$S' = v_0 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{1-\frac{2}{3}} = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{16}\right] \times 3$$
   $$= 12 \cdot \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{16}\right]$$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On note S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n). On a :
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\left(u_0 + u_n\right)}{2}$$

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 2. Déterminer la somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n naturel par :
$v_n = 4 + 3{\cdot}n$
Déterminer la somme S' des 20 premiers termes de la suite (v_n).

3. On considère la somme S'' définie par :
$S'' = 5 + 2 - 1 - 4 - \cdots - 37$
En déduire la valeur de S''.

Correction 7

1. La somme S, des 100 premiers termes de la suite (u_n) s'exprime par :
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = \frac{100\times\big(u_0 + u_{99}\big)}{2}$$
La suite (u_n) étant de premier terme 2 et de raison 2, le terme de rang 99 a pour valeur :
$u_{99} = u_0 + 99\times r = 2 + 99\times 2 = 2 + 198 = 200$

Ainsi, la somme S a pour valeur :
$$S = \frac{100\times\big(2+200\big)}{2} = 50\times 202 = 10\,100$$

2. L'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n permet d'affirmer que la suite (v_n) est la suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3. On a les valeurs :
   - $v_0 = 4$
   - $v_{19} = 4 + 19\times 3 = 4 + 57 = 61$

   La somme S' des 20 premiers termes de la suite (v_n) admet pour expression :
$$S' = \frac{20\times\big(u_0 + u_{19}\big)}{2} = \frac{20\times\big(4+61\big)}{2} = 10\times 65 = 650$$

3. Dans la somme S'', on reconnait les termes successifs de la suite (w_n) arithmétique de premier terme 5 et de raison -3.
Ainsi, on a la formule explicite pour tout entier n naturel :
$w_n = 5 + n{\cdot}r = 5 + n\times(-3) = 5 - 3n$

Déterminons le rang n du terme de cette suite ayant pour valeur -37 :
$$\begin{aligned} w_n &= -37 \\ 5 - 3n &= -37 \\ -3n &= -37 - 5 \\ -3n &= -42 \\ n &= \frac{-42}{-3} \\ n &= 14 \end{aligned}$$
Ainsi, la somme S'' s'exprime par :
$$S'' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14} = \frac{15\times\big(u_0 + u_{14}\big)}{2}$$
$$= \frac{15\times\big[5 + (-37)\big]}{2} = \frac{15\times\big(-32\big)}{2} = -15\times 16 = -240$$

