La forme canonique

Exercice 1*

Exprimer chacun des polynômes ci-dessous sous la forme d'une expression du type :

$\left(x-\beta\right)^2+\gamma$ où β et γ sont deux réels.

a. x^2-4x+1 b. x^2+6x+3 c. x^2+x+2

d. x^2-3x-1 e. $x^2+\frac{1}{2}x-3$ f. $x^2+x-\frac{1}{3}$

Correction 1

a. $x^2-4x+1=(x-2)^2-4+1=(x-2)^2-3$

b. $x^2+6x+3=\left(x+3\right)^2-9+3=\left(x+3\right)^2-6$

c. $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

d. $x^2-3x-1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

e. $x^2+\frac{1}{2}x-3=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-3$

$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{48}{16}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}$

f. $x^2+x-\frac{1}{3}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{12}$

Exercice 2

Tout polynôme du second degré $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ admet une expression de la forme :

$f:x\mapsto\alpha{\cdot}\left(x-\beta\right)^2+\gamma$

où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha\neq0$.

Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2+8x-6$ b. $3x^2+3x+6$

c. $9x^2+18x+27$ d. $5x^2+10x+2$

e. $2x^2+5x-4$ f. $3x^2+2x-1$

Correction 2

a. $2x^2+8x-6=2{\cdot}\left(x^2+4x\right)-6=2{\cdot}\left[\left(x+2\right)^2-4\right]-6$

$=2{\cdot}\left(x+2\right)^2-8-6=2{\cdot}\left(x+2\right)^2-14$

b. $3x^2+3x+6=3{\cdot}\left(x^2+x\right)+6=3{\cdot}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+6$

$=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+6=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+\frac{24}{4}$

$=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{4}$

c. $9x^2+18x+27=9{\cdot}\left(x^2+2x\right)+27=9{\cdot}\left[\left(x+1\right)^2-1\right]+27$

$=9{\cdot}\left(x+1\right)^2-9+27=9{\cdot}\left(x+1\right)^2+18$

d. $5x^2+10x+2=5{\cdot}\left(x^2+2x+\right)+2=5{\cdot}\left[(x+1)^2-1\right]+2$

$=5{\cdot}(x+1)^2-5+2=5{\cdot}(x+1)^2-3$

e. $2x^2+5x-4=2{\cdot}\left(x^2+\frac{5}{2}\right)-4=2{\cdot}\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]-4$

$=2{\cdot}\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-4=2{\cdot}\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-\frac{32}{4}$

$=2{\cdot}\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{57}{8}$

f. $3x^2+2x-1=3{\cdot}\left(x^2+\frac{2}{3}{\cdot}x\right)-1=3{\cdot}\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]-1$

$=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-1=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-\frac{3}{3}$

$=3{\cdot}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

Exercice 3*

Soit a, b, c trois nombres réels. Développer l'expression suivante :

$$a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Correction 3

$a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$=a{\cdot}\left[x^2+2{\cdot}a{\cdot}\frac{b}{2{\cdot}a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$=a{\cdot}\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a}=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+\frac{b^2-b^2+4ac}{4a}$

$=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+\frac{4ac}{4a}=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$

L'expression $a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ s'appelle la forme canonique du polynome ax^2+bx+c.

