Discriminant et résolution d'équations du second degré

Exercice 1

Le **discriminant** d'un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme :
$\Delta = b^2 - 4\times a\times c$

Déterminer le discrimant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+4 b. $2x^2+4x+1$ c. x^2-2x+1

d. $-2x^2+2x+1$ e. x^2-x-1 f. $3x^2+x-2$

Correction 1

a. L'expression $x^2{+}2x{+}4$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times1\times4 = 4-16 = -12$

b. L'expression $2x^2{+}4x{+}1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times2\times1 = 16-8 = 8$

c. L'expression $x^2{-}2x{+}1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times1 = 4-4 = 0$

d. L'expression $-2x^2{+}2x{+}1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times(-2)\times1 = 4+8 = 12$

e. L'expression $x^2{-}x{-}1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times1\times(-1) = 1+4 = 5$

f. L'expression $3x^2{+}x{-}2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times3\times(-2) = 1+24 = 25$

Exercice 2

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune solution	1 solution $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$	2 solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+4x-5=0$ b. $2x^2-13x+15=0$

c. $x^2+x+1=0$ d. $x^2+5x+2=0$

e. $-3x^2+6x-2=0$ f. $3x^2-2x+1=0$

Correction 2

a. Cherchons les racines de $x^2{+}4x{-}5$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times(-5) = 16+20 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S = \{-5\,;1\}$

b. Cherchons les racines de $2x^2{-}13x{+}15$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4\times2\times15 = 169-120 = 49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S = \left\{\dfrac{3}{2}\,;5\right\}$

c. Cherchons les racines de $x^2{+}x{+}1$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times1 = -3$

Le discriminat de ce trinôme est strictement négatif ; il n'admet aucune racine. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2+x+1=0$ est vide :
$S = \varnothing$

d. Cherchons les racines de $x^2{+}5x{+}2$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times1\times2 = 25-8 = 17 > 0$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S = \left\{\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\,;\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

e. Cherchons les racines du polynômes $-3x^2{+}6x{-}2$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\times(-3)\times(-2) = 36-24 = 12 > 0$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

 BY-NC

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2\sqrt{3}}{-6} = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S=\left\{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

f. Cherchons les racines de $3x^2-2x+1$:

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times3\times1 = 4-12 = -8 < 0$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ; l'ensemble des solutions de cette équation est vide :
$S = \varnothing$

Exercice 3

Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

a. $2x^2-3x-9$ b. $5x^2-8x+5$

c. $2x^2-8x+8$ d. x^2+2x-1

Correction 3

a. Le polynôme $2x^2-3x-9$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times2\times(-9) = 9+72 = 81$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-9}{2\times2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+9}{2\times2} = \frac{12}{4} = 3$$

b. Le polynôme $5x^2-8x+5$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-8)^2-4\times5\times5 = 64-100 = -36$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, il n'eadmet aucune racine.

c. Le polynôme $2x^2-8x+8$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-8)^2-4\times2\times8 = 64-64 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique racine dont la valeur est :
$x_1 = -\frac{b}{2{\cdot}a} = -\frac{-8}{2\times2} = 2$

d. Le polynôme x^2+2x-1 admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times1\times(-1) = 4+4 = 8$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = 2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2{\cdot}(-1-\sqrt{2})}{2} = -1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2{\cdot}(-1+\sqrt{2})}{2} = -1+\sqrt{2}$$

 BY-NC