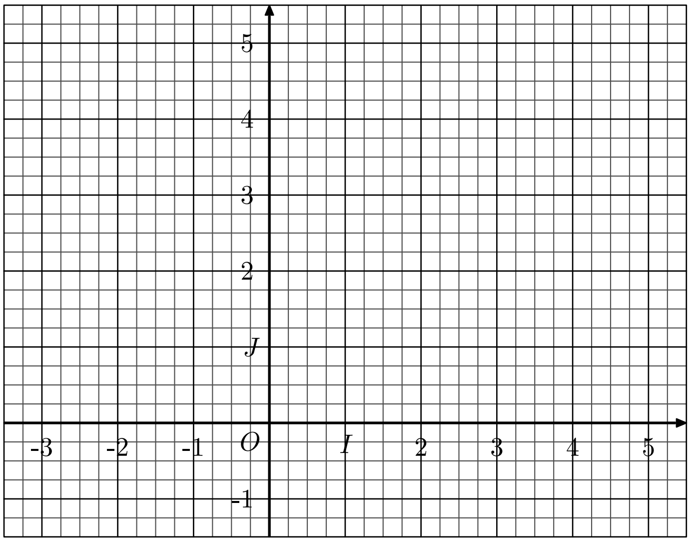
Produit scalaire 1

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



On considère les points A, B et C définis par :

$A(-3\,;1)$; $B(4\,;-1)$; $C(1\,;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.

2. Soit J l'image du point A par la symétrie centrale de centre C.

   a. Donner une relation vectorielle vérifiée par les points A, C et J

   b. Déterminer les coordonnées du point J.

3. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Correction 1

1. Le point I a pour coordonnées :

$$I\Big(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{4+1}{2}\,;\frac{-1+3}{2}\Big)$$
$$=\Big(\frac{5}{2}\,;\frac{2}{2}\Big)=\Big(\frac{5}{2}\,;1\Big)$$

2. a. Les points A, C et J vérifient la relation : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CJ}$

   b. Notons $(x\,;y)$ les coordonnées du point J. On a les coordonnées de vecteurs :

   - $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)=(1-(-3)\,;3-1)$ $=(4\,;2)$
   - $\overrightarrow{CJ}(x-x_C\,;y-y_C)=(x-1\,;y-3)$

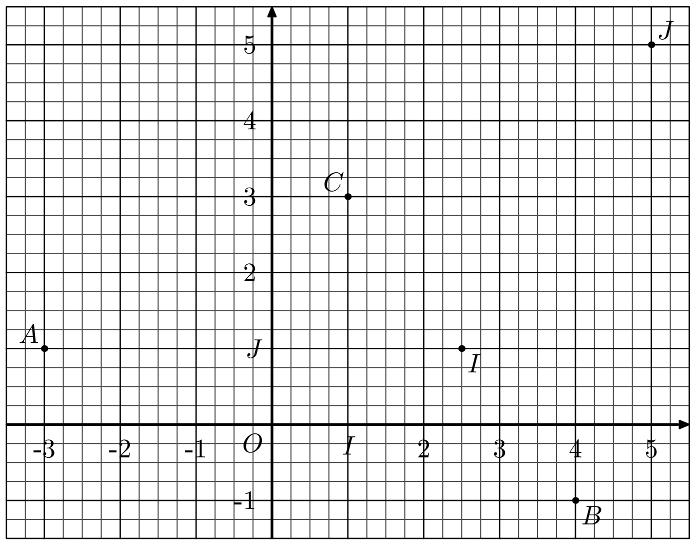
   L'égalité vectorielle de la question a. :

$x-1=4$	$y-3=2$
$x=4+1$	$y=2+3$
$x=5$	$y=5$

   Ainsi, le point J a pour coordonnées : $J(5\,;5)$

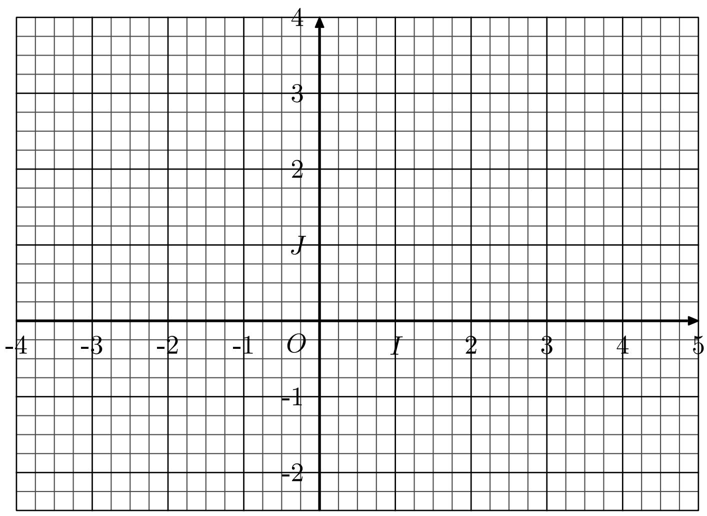
3. On a :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\big(x_B-x_A\big)^2+\big(y_B-y_A\big)^2}$$
$$=\sqrt{\big[4-(-3)\big]^2+\big(-1-1\big)^2}=\sqrt{7^2+\big(-2\big)^2}$$
$$=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$



Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



1. On rappelle la formule de la distance entre deux points :

$$PQ=\sqrt{\big(x_Q-x_P\big)^2+\big(y_Q-y_P\big)^2}$$

On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées :

$A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$

a. Déterminer les distances AB, AC et BC.

b. Etablir que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ un vecteur, on définit la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ comme le nombre $\|\overrightarrow{u}\|$ défini par :

$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

On considère les deux points E et F de coordonnées :

$E(-1\,;2)$; $G(4\,;3)$

et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées :

$\overrightarrow{u}(4\,;-1)$; $\overrightarrow{v}(1\,;2)$

a. Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

b. Déterminer les coordonnées des points F et H vérifiant les deux égalités vectorielles :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{v}$

c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ à l'aide des points E, F et G?

d. Le triangle EFG est-il rectangle?

Correction 2

1. a. On a les distances suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$= \sqrt{\left[-2-(-3)\right]^2+(-2-2)^2}$
$= \sqrt{(-2+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{1^2+16} = \sqrt{17}$
- $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$
$= \sqrt{\left[2-(-3)\right]^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(2+3)^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{5^2+9} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
- $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$
$= \sqrt{\left[2-(-2)\right]^2+\left[-1-(-2)\right]^2}$
$= \sqrt{(2+2)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{4^2+1^2}$
$= \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

b. Le triangle ABC est isocèle en B car :

$AB = BC = \sqrt{17}$

On remarque les valeurs :

- $AB^2+BC^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2+\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17+17 = 34$
- $AC^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2 = 34$

On en déduit l'égalité : $AB^2+BC^2=AC^2$

Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors ce triangle est rectangle.

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

En conclusion, le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

2. a. On a les normes de vecteurs :

- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
- $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

b. - L'égalité vectorielle $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{u}$ se traduit par l'égalité des coordonnées :

$(x_F-x_E\,;y_F-y_E) = (4\,;-1)$

$(x_F-(-1)\,;y_F-2) = (4\,;-1)$

$(x_F+1\,;y_F-2) = (4\,;-1)$

On en déduit les deux égalités :

$x_F+1=4$	$y_F-2=-1$
$x_F=4-1$	$y_F=-1+2$
$x_F=3$	$y_F=1$

Le point F a pour coordonnées : $F(3\,;1)$

- L'égalité vectorielle $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{v}$ se traduit par l'égalité des coordonnées :

$(x_G-x_H\,;y_G-y_H) = (1\,;2)$

$(4-x_H\,;3-y_H) = (1\,;2)$

On en déduit les deux égalités :

$4-x_H=1$	$3-y_H=2$
$-x_H=1-4$	$-y_H=2-3$
$-x_H=-3$	$-y_H=-1$
$x_H=3$	$y_H=1$

Le point H a pour coordonnées : $H(3\,;1)$

On remarque que les points H et F sont confondus.

c. On a les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$

d. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\,(4+1\,;-1+2)=(5\,;1)$

On en déduit la mesure du segment $[EG]$:

$EG = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

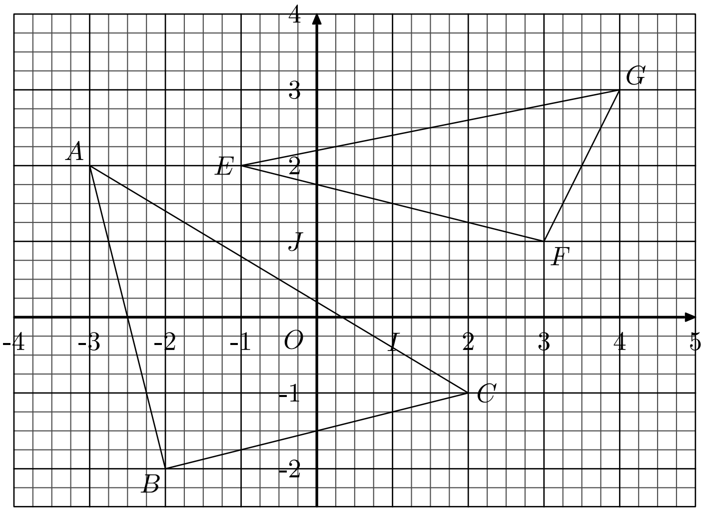
On a les valeurs suivantes :

- $EG^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$
- $EF^2+FG^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2$
$= 17+5 = 22$

On remarque : $EG^2 \neq EF^2+FG^2$

Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore alors ce triangle n'est pas rectangle.

Le triangle EFG n'est pas un triangle rectangle.



Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$.

- Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y'$
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$$A(-3\,;2) \quad ; \quad B(-2\,;-2) \quad ; \quad C(2\,;-1) \quad ; \quad D(1\,;3)$$

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Correction 3

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)=(4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$
   $= 1{\times}4+(-4){\times}1 = 0$

2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D) = (1\,;-4)$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCd$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les trois points :

$$A(-2\,;1) \quad ; \quad B(-8\,;-3) \quad ; \quad D\Big(-3\,;\frac{5}{2}\Big)$$

1. Déterminer les coordonnées du point C tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Correction 4

1. Pour le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut avoir l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

   En notant $C(x\,;y)$ les coordonnées du point C, on peut exprimer les coordonnées de ces deux vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A) = \big(-8-(-2)\,;\,-3-1\big)$
     $= (-8+2\,;\,-4) = (-6\,;\,-4)$
   - $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D) = \Big(x-(-3)\,;y-\frac{5}{2}\Big)$

   L'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ implique l'égalité de leurs coordonnées et on obtient les deux équations suivantes :

   $$\begin{aligned} x+3 &= -6 \\ x &= -6-3 \\ x &= -9 \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} y-\frac{5}{2} &= -4 \\ y &= -4+\frac{5}{2} \\ y &= -\frac{8}{2}+\frac{5}{2} \\ y &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

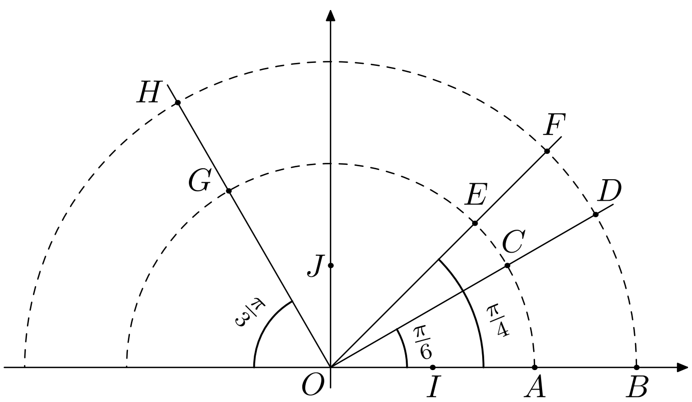
   Ainsi, le point C a pour coordonnées : $C\Big(-9\,;-\frac{3}{2}\Big)$

2. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A) = \Big(-3-(-2)\,;\frac{5}{2}-1\Big)$
   $= \Big(-3+2\,;\frac{5}{2}-\frac{2}{2}\Big) = \Big(-1\,;\frac{3}{2}\Big)$

   On a le produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -6{\times}(-1)+(-4){\times}\frac{3}{2} = 6-2{\times}3 = 6-6 = 0$

Exercice 5

On considère le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



Deux demi-cercles sont tracés : $OA=2\,cm$ et $OB=3\,cm$

1. Déterminer les coordonnées des points figurants sur cette figure.
2. Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

   a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ b. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$
   c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$ d. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OG}$

Correction 5

1. Voici les coordonnées polaires des points présents dans la figure :

- $O\left[0\ ;\ 0\right]$
- $A\left[2\ ;\ 0\right]$
- $B\left[3\ ;\ 0\right]$
- $C\left[2\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$
- $D\left[3\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$
- $E\left[2\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$
- $F\left[3\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$
- $G\left[2\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$
- $H\left[3\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$

Voici les coordonnées cartésiennes de ces points :

- $O(0\times\cos 0\,;0\times\sin 0)=(0\,;0)$
- $A(2\times\cos 0\,;2\times\sin 0)=(2\,;0)$
- $B(3\times\cos 0\,;3\times\sin 0)=(3\,;0)$
- $C\left(2\times\cos\frac{\pi}{6}\,;2\times\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\sqrt{3}\,;1\right)$
- $D\left(3\times\cos\frac{\pi}{6}\,;3\times\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$
- $E\left(2\times\cos\frac{\pi}{4}\,;2\times\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$
- $F\left(3\times\cos\frac{\pi}{4}\,;3\times\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
- $G\left(2\times\cos\frac{2\pi}{3}\,;2\times\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$
- $H\left(3\times\cos\frac{2\pi}{3}\,;3\times\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Puisque O est l'origine du repère, pour tout point X du plan, ce point et le vecteur $\overrightarrow{OX}$ ont les mêmes coordonnées.
Utilisons les coordonnées trouvées à la question précédente :

a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\times\sqrt{3}+0\times 1=2\sqrt{3}$

b. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+0\times\frac{3}{2}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$

c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}=3\times\sqrt{2}+0\times\sqrt{2}$

d. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(-1)+\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$