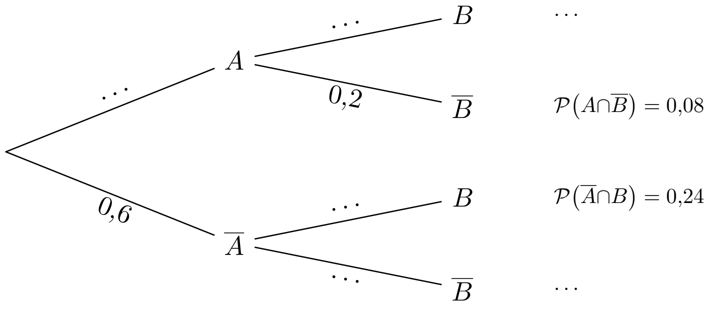
Probabilités premières

Exercice 1

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}_A(B)$ c. $\mathcal{P}(A \cap B)$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

Correction 1

a. $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

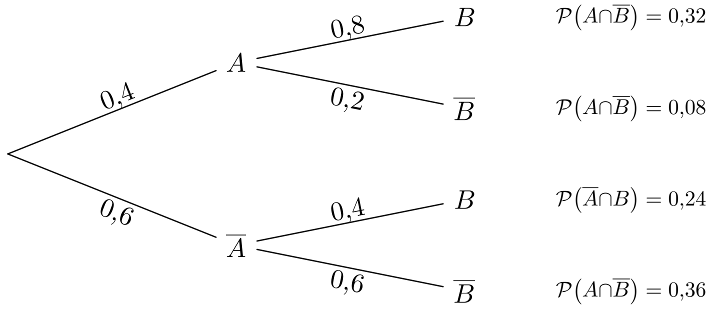
b. $\mathcal{P}_A(B) = 1 - \mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

c. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathcal{P}(\overline{A})} = \dfrac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$

e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

f. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathcal{P}(\overline{A}) \times \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$



Exercice 2

Une entreprise de jouets est spécialisée dans la fabrication de poupées qui parlent et qui marchent.

Chaque poupée peut présenter deux défaut et deux seulement : un défaut mécanique, un défaut électrique.

Une étude statistique montre que :

- 8% des poupées présentent le défaut mécanique ;
- 5% des poupées présentent le défaut électrique ;
- 2% des poupées présentent ces deux défauts.

Le production journalière est de 1000 poupées.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui décrit la production journalière :

	poupées avec défaut mécanique	Poupées sans défaut mécanique	total
Poupées avec défaut électrique			
Poupées sans défaut électrique			
total	80		1 000

Dans la suite de l'exercice, chaque résultat numérique sera donné sous forme décimale.

2. On prélève au hasard une poupée dans la production d'une journée.

   a. Soit A l'événement "*la poupée prélevée est sans défaut*". Calculer la probabilité de A.

   b. Soit B l'événement "*la poupée prélevée a au moins un défaut*". Montrer que la probabilité de B est 0,11.

   c. Soit C l'événement "*la poupée prélevée n'a qu'un seul défaut*". Quelle est la probabilité de C?

   d. Quelle est la probabilité que la poupée prélevée présente le défaut mécanique sachant qu'elle présente un défaut électrique?

Correction 2

1.

	poupées avec défaut mécanique	pourpées sans défaut mécanique	total
poupées avec défaut électrique	20	30	50
poupées sans défaut électrique	60	890	950
total	80	920	1 000

2. Il faut préciser que chaque poupée à la même probabilité d'être prélevée : on est dans le cas d'équiprobabilité :

   a. Il y a 890 poupées sans défaut sur un total de 1000 :
   $\mathcal{P}(A) = \dfrac{890}{1\,000} = 0{,}89$

   b. Il y a 890 poupées ne présentant pas de défaut :
   $\mathcal{P}(B) = 1 - \dfrac{890}{1\,000} = 1 - 0{,}89 = 0{,}11$

   c. Il y a 60+30=90 poupées ne présentant aucun défaut, ainsi on a :
   $\mathcal{P}(C) = \dfrac{90}{1\,000} = 0{,}09$

   d. Soit M l'évenement de prélevée une poupée ayant un défaut mécanique et E lévénement de prélevée une poupée ayant un défaut électrique.
   Ainsi, la probabilité de prélevée une poupée ayant un défaut mécanique sachant qu'elle présente le défaut électrique est :
   $\mathcal{P}_E(M) = \dfrac{\mathcal{P}(M \cap E)}{\mathcal{P}(E)} = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

Exercice 3*

A la ferme "*La ferme de la Poule Pondeuse*", chaque jour on produit des oeufs de deux tailles différentes :

- 60% des oeufs sont moyens et 40% des oeufs sont gros.

Les oeufs sont classés en deux catégories : ceux de qualité ordinaire et ceux de qualité supérieure.

On a remarqué que :

- 50 % des oeufs moyens sont de qualité ordinaire,
- 20% des gros oeufs sont de qualité ordinaire

On choisit un oeuf au hasard. Le choix au hasard d'un oeuf dans la production du jour signifie qu'on se place dans un modèle avec équiprobabilité.

On définit les événements suivants :

- M : "*l'oeuf est moyen*"
- G : "*l'oeuf est gros*"
- O : "*l'oeuf est de qualité ordinaire*"
- S : "*l'oeuf est de qualité supérieure*"

1. Donner les probabilités suivantes :
   - $P(G)$: probabilité que l'oeuf soit gros,
   - $P_G(S)$: probabilité que l'oeuf soit de qualité supérieure sachant qu'il est gros.

2. Démontrer que la probabilité de prendre un oeuf gros et de qualité supérieure est égale à 0,32.

3. Calculer la probabilité $\mathcal{P}(M\cap S)$ que l'oeuf soit moyen et de qualité supérieure, puis la probabilité $P(S)$ de l'événement S.

Correction 3

1. D'après l'énoncé, on a
   - $\mathcal{P}(G) = 0{,}4$
   - $\mathcal{P}_G(S) = 0{,}8$

2. $\mathcal{P}(G\cap S) = \mathcal{P}(G)\times\mathcal{P}_G(S) = 0{,}4\times0{,}8 = 0{,}32$

3. Puisque, parmi les oeufs moyens, les oeufs de qualité ordinaire représente 50 % de ceux-ci, on en déduit :
   $\mathcal{P}_M(S) = 0{,}5$

   On a la probabilité :
   $\mathcal{P}(M\cap S) = \mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}_M(S) = 0{,}6\times0{,}5 = 0{,}3$

   Les évènements M et G formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(M\cap S) + \mathcal{P}(G\cap S) = 0{,}32 + 0{,}3 = 0{,}62$

Exercice 4

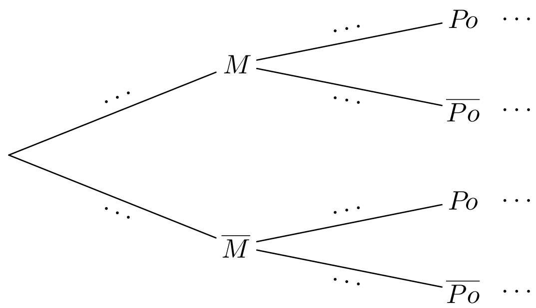
Rappels

- On note $\overline{A}$ l'événement contraire d'un évènement A, $\mathcal{P}(A)$ la probabilité d'un événement A,
- "A et B" ou $A\cap B$ l'intersection de deux évènements A et B,
- "A ou B" ou $A\cup B$ la réunion de deux évènements A et B.
- $P_B(A)$ la probabilité qu'un évènement A se réalise, sachant qu'un évènement B *(de probabilité nulle)* est déjà réalisé. On a :
  $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \dfrac{\mathcal{P}(A \text{ et } B)}{\mathcal{P}(B)}$

Dans un pays européen, 12 % des moutons sont atteints par une maladie.
Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché mais il n'est pas totalement fiable.
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93 % des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97 % des cas.

On choisit un mouton au hasard et on le soumet au test de dépistage de la maladie.
On note M l'événement "*le mouton est malade*".
On note Po l'événement "*le test est positif*".

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



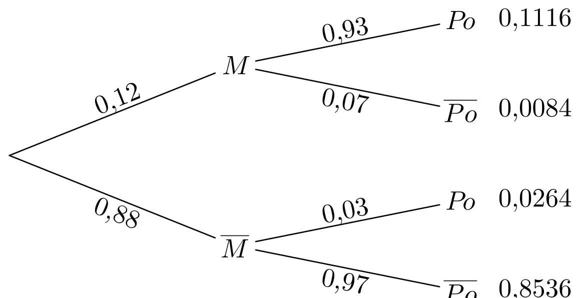
2. Calculer les probabilités des évènements A, B, C suivants :
   - A : "Le mouton est malade et le test est positif"
   - B : "Le mouton est sain et le test est positif"
   - C : "Le mouton est malade et le test est négatif".

3. En déduire que la probabilité de l'événement Po est égale à 0,138.
   Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?

4. Dans cette question les résultats seront arrondis au millième.
   a. Sachant qu'un mouton a un test positif, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas malade ?
   b. Sachant qu'un mouton a un test négatif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Correction 4

1.



2. • $A = M \cap Po$. Or on sait que : $\mathcal{P}_M(Po) = \dfrac{\mathcal{P}(M \cap Po)}{\mathcal{P}(M)}$.
D'après l'arbre de probabilité, on a :
$$\mathcal{P}(M \cap Po) = \mathcal{P}_M(Po) \times \mathcal{P}(M)$$
$$= 0{,}93 \times 0{,}12 = 0{,}1116$$

• $B = \overline{M} \cap Po$. Or, on a la formule :
$$\mathcal{P}_{\overline{M}}(Po) = \frac{\mathcal{P}(\overline{M} \cap Po)}{\mathcal{P}(\overline{M})}$$
D'après l'arbre de probabilité, on a :
$$\mathcal{P}(\overline{M} \cap Po) = \mathcal{P}_{\overline{M}}(Po) \times \mathcal{P}(\overline{M}) = 0{,}88 \times 0{,}03 = 0{,}0264$$

• $C = M \cap \overline{Po}$. On a la probabilité conditionnelle suivante :
$$\mathcal{P}_M(\overline{Po}) = \frac{\mathcal{P}(M \cap \overline{Po})}{\mathcal{P}(M)}$$
On en déduit :
$$\mathcal{P}(M \cap \overline{Po}) = \mathcal{P}_M(\overline{Po}) \times \mathcal{P}(M)$$
$$= 0{,}12 \times 0{,}07 = 0{,}0084$$

3. Les événements M et $\overline{M}$ sont complémentaires l'un de l'autre. Ce qui permet d'écrire l'événement Po comme réunion disjointes des événements $Po \cap M$ et $Po \cap \overline{M}$.
Ce qui permet d'écrire :
$$\mathcal{P}(Po) = \mathcal{P}\big[(Po \cap M) \cup (Po \cap \overline{M})\big]$$
$$= \mathcal{P}(Po \cap M) + \mathcal{P}(Po \cap \overline{M})$$
$$= 0{,}1116 + 0{,}0264 = 0{,}138$$
La probabilité que le test soit négatif est de :
$$P(\overline{Po}) = 1 - P(Po) = 1 - 0{,}138 = 0{,}862$$

4. a. La probabilité qu'un mouton ne soit pas malade sachant que le test est positif se calcule par :
$$\mathcal{P}_{Po}(\overline{M}) = \frac{\mathcal{P}(\overline{M} \cap Po)}{\mathcal{P}(Po)}$$
D'après la question 3. et 2., on déduit que :
$$\mathcal{P}_{Po}(\overline{M}) = \frac{0{,}0264}{0{,}138} \approx 0{,}1913 \approx 0{,}191$$

b. La probabilité qu'un mouton soit malade sachant qu'il a un test négatif est la probabilité conditionnelle suivante :
$$\mathcal{P}_{\overline{Po}}(M) = \frac{\mathcal{P}(\overline{Po} \cap M)}{\mathcal{P}(\overline{Po})}$$
A l'aide des question 2. et 3., on déduit :
$$\mathcal{P}_{\overline{Po}}(M) = \frac{0{,}0084}{0{,}862} \approx 0{,}00974 \approx 0{,}010$$

Exercice 5

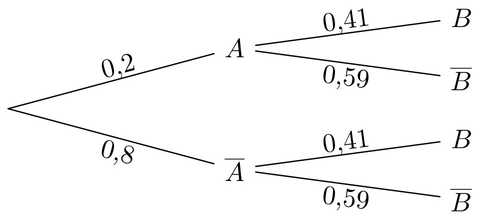
Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que :
$$\mathcal{P}(A) = 0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}35.$$
Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Correction 5

La formule de la probabilité d'une réunion donne la relation suivante :
$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$$
Les évènements A et B étant indépendants :
$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$
$$0{,}35 = 0{,}3 + \mathcal{P}(B) - 0{,}3 \times \mathcal{P}(B)$$
$$0{,}35 - 0{,}3 = \mathcal{P}(B) \times (1 - 0{,}3)$$
$$0{,}7 \times \mathcal{P}(B) = 0{,}05$$
$$\mathcal{P}(B) = \frac{0{,}05}{0{,}7}$$
$$\mathcal{P}(B) = \frac{5}{70}$$
$$\mathcal{P}(B) = \frac{1}{14}$$

Exercice 6

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

2. Etablir que les évènements A et B sont indépendants.

Correction 6

1. On a les deux probabilités :
   - $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0{,}2 \times 0{,}41 = 0{,}082$
   - $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B) = \mathcal{P}(\overline{A}) \times \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}8 \times 0{,}41 = 0{,}328$

   Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \overline{A}) = 0{,}082 + 0{,}328 = 0{,}41$$

2. D'après la question 1., on a :
   - $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = 0{,}2 \times 0{,}41 = 0{,}082$
   - $\mathcal{P}(A \cap B) = 0{,}082$

   On remarque l'égalité $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ et on en déduit que les deux évènements A et B sont indépendants.

