Généralités sur les probabilités

Exercice 1

Voici le tableau représentant la loi de probabilité d'un dés truqué à six faces :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,1	0,08	0,17	0,22	0,28

Déterminer la probabilité de chacun des évènements ci-dessous :

1. A : “*Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4*”.
2. B : “*Le nombre obtenu est pair*”.

Correction 1

1. L'évènement A est composé des quatre évènements élémentaires ci-dessous : $A=\{4\,;5\,;6\}$

   Ainsi, la probabilité de l'évènement A est donnée par :
   $$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{4\}) + \mathcal{P}(\{5\}) + \mathcal{P}(\{6\})$$
   $$= 0{,}17 + 0{,}22 + 0{,}28 = 0{,}67$$

2. L'évènement B est composé des trois évènements élémentaires suivants : $B=\{2\,;4\,;6\}$

   La probabilité de l'évènement B est donnée ci-dessous :
   $$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{2\}) + \mathcal{P}(\{4\}) + \mathcal{P}(\{6\})$$
   $$= 0{,}1 + 0{,}17 + 0{,}28 = 0{,}55$$

Exercice 2

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0{,}42 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}19$$

Sachant que $\mathcal{P}(A\cup B)=0{,}43$, déterminer la probabilité de l'évènement $A\cap B$.

Correction 2

On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(A\cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}43 = 0{,}42 + 0{,}19 - \mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}43 = 0{,}61 - \mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}43 - 0{,}61 = -\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$-0{,}18 = -\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$\mathcal{P}(A\cap B) = 0{,}18$$

Exercice 3

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : “*Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois?*”. Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 2e mois \ Retards le 1er mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

On choisit au hasard un individu de cette population.
On arrondira les probabilités au millième près.

1. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
2. a. Parmi les individus n'ayant pas eu de retard le premier mois, quelle est la probabilité de choisir au hasard un individu qui ait eu au moins un retard le second mois?

   b. Parmi les individus ayant eu au moins un retard le second mois, quelle est la probabilité de choisir un individu n'ayant pas eu de retard le premier mois?

Correction 3

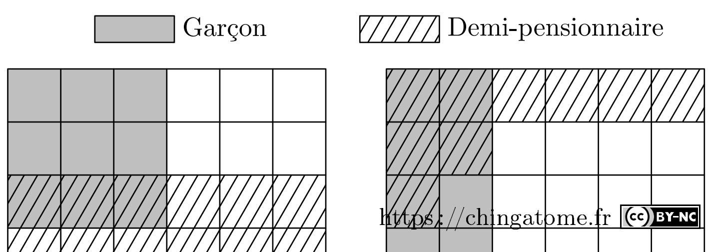
1. Il y a eu 428 personnes qui ont eu au moins un retard le premier mois. Ainsi, la probabilité que la personne choisit au hasard ait eu au moins un retard le premier mois est de :
   $$\frac{428}{1000} = 0{,}428$$

2. a. Parmi les 572 personnes n'ayant pas eu de retard lors du premier mois, il y a 310 personnes *(*250+60*)* ayant eu au moins un retard lors du deuxième mois. Ainsi, la probabilité que la personne choisi ait eu au moins un retard le deuxième mois parmi les gens n'ayant pas eu de retard lors du premier mois est de :
   $$\frac{310}{572} \approx 0{,}5419 \approx 0{,}542$$

   b. Parmi les 453 personnes *(*346+107*)* ayant eu au moins 1 retard le second mois, il y a 310 *(250+60)* personnes qui n'ont pas eu de retard le premier mois.
   Ainsi, la probabilité recherchée a pour valeur :
   $$\frac{310}{453} \approx 0{,}6843 \approx 0{,}684$$

Exercice 4*

On considère deux classes de classes de 24 élèves représentées par le schéma ci-dessous :



On considère les deux évènements suivants :

- G : “*l'élève est un garçon*” ;
- D : “*l'élève est demi-pensionnaire*”.

1. Pour la classe A :

   a. Déterminer les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(G)$: probabilité de choisir un garçon dans la classe.
   - $\mathcal{P}_G(D)$: probabilité de choisir un demi-pensionnaire parmi les garçons.
   - $\mathcal{P}(G\cap D)$: probabilité de choisir un garçon demi-pensionnaire dans la classe.

   b. Vérifier que les valeurs trouvées à la question a. vérifient l'égalité :
   $\mathcal{P}(G)\times\mathcal{P}_G(D) = \mathcal{P}(G\cap D)$

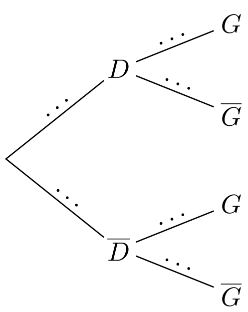
2. Pour la classe B :

   a. Compléter les pointillés suivants :
   - $\mathcal{P}_D(G)$: probabilité de choisir .... parmi ....
   - $\mathcal{P}_{\overline{D}}(G)$: probabilité de choisir .... parmi ....

   b. Déterminer les probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(D)$; $\mathcal{P}_D(G)$; $\mathcal{P}_{\overline{D}}(G)$

   c. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

   d. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(D\cap\overline{G})$, puis établir l'égalité :
   $\mathcal{P}(D\cap\overline{G}) = \mathcal{P}(D)\times\mathcal{P}_D(\overline{G})$



Correction 4

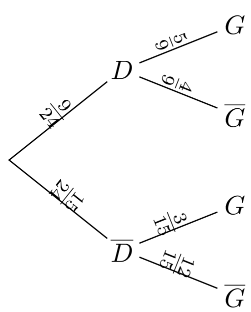
1. a. D'après le schéma, on a les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(G) = \dfrac{9}{24}$
   - $\mathcal{P}_G(D) = \dfrac{3}{9}$
   - $\mathcal{P}(G\cap D) = \dfrac{3}{24}$

   b. On a les égalités suivantes :
   $\mathcal{P}(G) = \dfrac{9}{24}\times\dfrac{3}{9} = \dfrac{3}{24} = \mathcal{P}(G\cap D)$

2. a. Voici les phrases complétées :
   - $\mathcal{P}_D(G)$: probabilité de choisir un garçon parmi les demi-pensionnaires
   - $\mathcal{P}_{\overline{D}}(G)$: probabilité de choisir un garçon parmi les non demi-pensionnaires.

   b. D'après le schéma, on a les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(D) = \dfrac{9}{24}$
   - $\mathcal{P}_D(G) = \dfrac{5}{9}$
   - $\mathcal{P}_{\overline{D}}(G) = \dfrac{3}{15}$

   c. Voici l'arbre complété :



   d. D'après le schéma de l'énoncé, on a :
   $\mathcal{P}(D\cap\overline{G}) = \dfrac{4}{24}$
   Etablissons l'égalité recherchée :
   $\mathcal{P}(D)\times\mathcal{P}_D(\overline{G}) = \dfrac{9}{24}\times\dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{24} = \mathcal{P}(D\cap\overline{G})$