

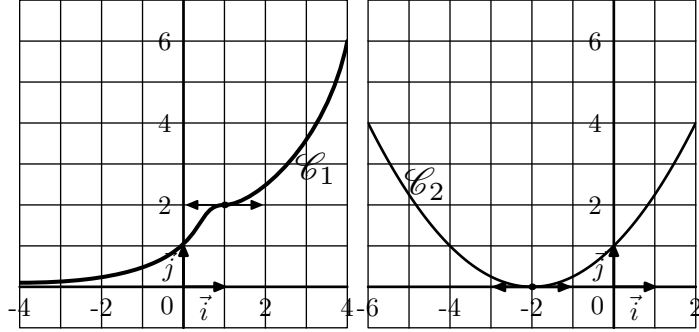
La fonction exponentielle

Exercice 1

On considère une fonction f vérifiant les deux conditions ci-dessous :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Justifier que les courbes ci-dessous ne sont pas la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



Correction 1

Les deux courbes présentées vérifient la condition :

$$f(0) = 1$$

Vérifions que la seconde condition n'est vérifiée par aucune

des courbes.

- Notons g la fonction ayant pour courbe représentative la courbe $\mathcal{C}_1$.

La courbe $\mathcal{C}_1$ passant par le point de coordonnées $(1; 2)$ et admettant en ce point une tangente horizontale, on a :

$$g(1) = 2 \quad ; \quad g'(1) = 0$$

La fonction g ne vérifie pas la seconde condition. La courbe $\mathcal{C}_1$ n'est pas la courbe représentative de la fonction f .

- Notons h la fonction ayant pour courbe représentative la courbe $\mathcal{C}_2$.

Le point $(-4; 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_h$. Ainsi, on a :

$$h(-4) = 1$$

Si la fonction h devait vérifier la seconde condition recherchée alors, on aurait :

$$h'(-4) = 1$$

Or, ceci est impossible car la fonction h est décroissante sur l'intervalle $[-6; -2]$ et les nombres dérivés sur cet intervalle doivent être strictement négatif.

La courbe $\mathcal{C}_2$ n'est pas la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 2

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle I , la connaissance de la fonction f' , dérivée de la fonction f , permet de déterminer en chaque point la direction de sa courbe.



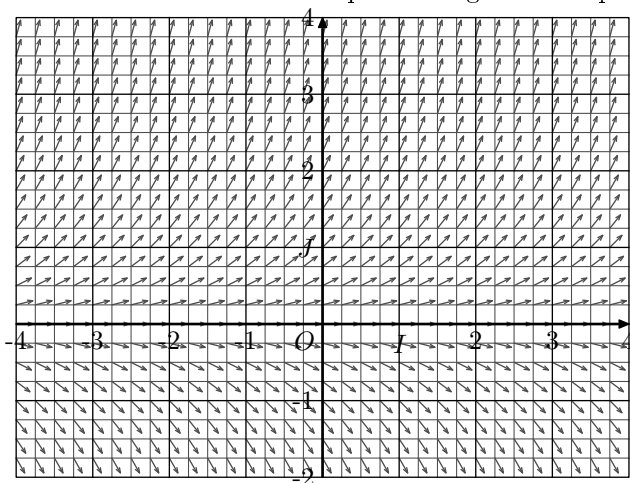
r105-0

Il est alors possible de représenter un "champs des tangentes" qui imposera la direction de la courbe à en chacun de ses points. Un unique point "de départ" permettra de re-construire approximativement la courbe de la fonction :

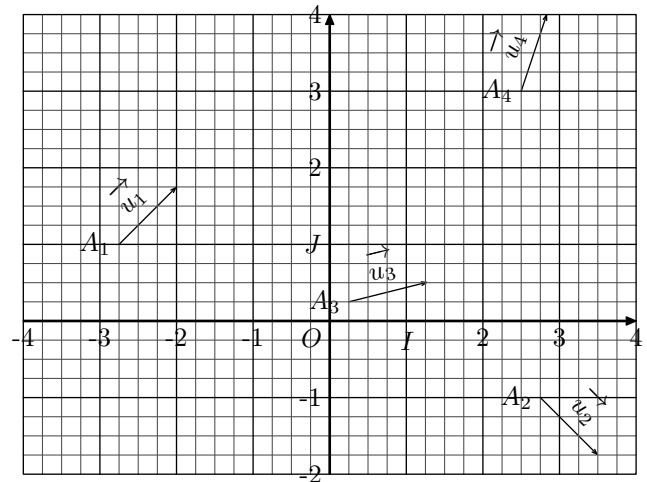


r105-1

- a. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe d'une fonction vérifiant le champs des tangentes indiqué :



- b. Tracer la courbe de la fonction passant par le point J
- Pour étudier les caractéristiques de ce champs de tangentes, on a mis en évidence des vecteurs directeurs de ces tangentes :

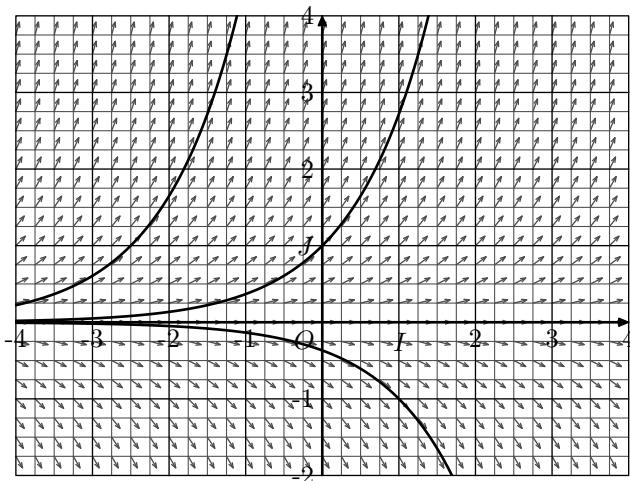


- Pour chaque valeur de i dans l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$, donner les coordonnées du point A_i .
- Pour chaque valeur de i dans l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$, donner le coefficient directeur de la tangente passant par le point A_i et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}_i$.
- Quels arguments permettent de conjecturer que la fonction, notée f et dont la courbe représentative a été tracé à la question 1. b., a pour propriétés :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Correction 2

- Voici les trois courbes possibles dont celle passant par le point de coordonnées $(0; 1)$:



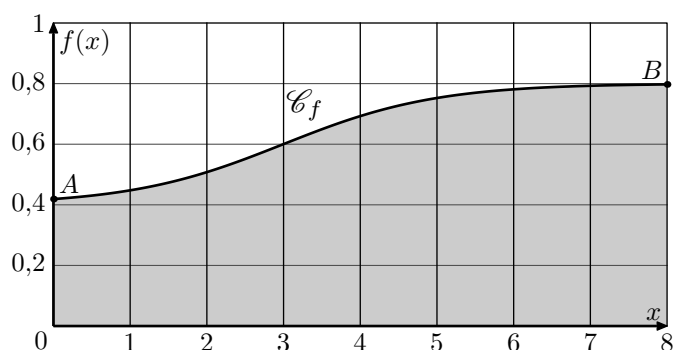
Exercice 3

On considère la fonction définie sur $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$$

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f , définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\exp(3) \cdot \exp(5)$

b. $\exp(-2) \cdot \exp(4)$

c. $\frac{1}{\exp(-5)}$

d. $[\exp(5)]^3$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^3 \cdot e^4$

b. $e^4 \cdot e^{-4}$

c. $(e^4)^3 \cdot e^4$

d. $\frac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$

e. $e^5 \cdot e^6$

f. $\frac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}}$

Correction 5

2. a. Voici les coordonnées des points A_i :

$A_1(-2,75;1)$; $A_2(2,75;-1)$; $A_3(0,25;0,25)$; $A_4(2,5;3)$

b. Voici les coefficients directeurs a_i :

$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = -1 \quad ; \quad a_3 = 0,25 \quad ; \quad a_4 = 3$$

c. La courbe tracée à la question 1. b. passe par le point $J(0;1)$ ainsi la fonction f associée vérifie :

$$f(0) = 1$$

On remarque que le champ de tangente vérifie que la tangente en un point a pour coefficient directeur l'ordonnée de ce point. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = f(x)$$

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse

Proposition 1

L'altitude du village B est $0,6 \text{ km}$.

Proposition 2

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

Correction 3

● La proposition est fausse :

Le point B a pour coordonnées $(8; 0,8)$. L'altitude du village B est $0,8 \text{ km}$.

● La proposition est vraie :

➡ Le village A est repéré sur le graphique avec une abscisse de 0. Son altitude est :

$$f(0) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-0} + 1} + 0,4 \approx 0,419$$

➡ Le village B est repéré sur le graphique avec une abscisse de 8. Son altitude est :

$$f(8) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-8}} + 0,4 \approx 0,797$$

Ainsi, l'écart d'altitude entre les villages A et B est :

$$f(8) - f(0) = 0,797 - 0,419 = 0,378 \text{ km}$$

Correction 4

a. $\exp(3) \cdot \exp(5) = \exp(3+5) = \exp(8)$

b. $\exp(-2) \cdot \exp(4) = \exp(-2+4) = \exp(2)$

c. $\frac{1}{\exp(-5)} = \exp[-(-5)] = \exp(5)$

d. $[\exp(5)]^3 = \exp(3 \times 5) = \exp(15)$

a. $e^3 \cdot e^4 = e^{3+4} = e^7$

b. $e^4 \cdot e^{-4} = e^{4+(-4)} \cdot e^0 = 1$

c. $(e^4)^3 \cdot e^4 = e^{3 \times 4} \cdot e^4 = e^{12} \cdot e^4 = e^{12+4} = e^{16}$

d. $\frac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}} = \frac{e^{5+(-3)}}{e^{-2}} = \frac{e^2}{e^{-2}} = e^{2-(-2)} = e^4$

e. $e^5 \cdot e^6 = e^{5+6} = e^{11}$

f. $\frac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}} = \frac{e^{6+(-2)}}{e^{-4}} = \frac{e^4}{e^{-4}} = e^{4-(-4)} = e^8$

Exercice 6*

Simplifier les expressions suivantes :

a. $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$

b. $(e^3)^{-2} \cdot e^5$

c. $(e^2 + e^{-2}) \cdot (e^2 - e^{-2})$

d. $\frac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

Correction 6

a. $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$
 $= [(e^5)^2 - 2 \cdot e^5 \cdot e^4 + (e^4)^2] - [(e^5)^2 + 2 \cdot e^5 \cdot e^4 + (e^4)^2]$
 $= (e^{10} - 2 \cdot e^9 + e^8) - (e^{10} + 2 \cdot e^9 + e^8) = -4 \cdot e^9$

b. $(e^3)^{-2} \cdot e^5 = e^{-2 \times 3} \cdot e^5 = e^{-6} \cdot e^5 = e^{-6+5} = e^{-1}$

c. $(e^2 + e^{-2}) \cdot (e^2 - e^{-2})$
 $= e^2 \cdot e^2 - e^2 \cdot e^{-2} + e^{-2} \cdot e^2 - e^{-2} \cdot e^{-2}$
 $= e^4 - e^0 + e^0 - e^{-4} = e^4 - e^{-4}$

d. $\frac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2} = \frac{e^6 - e^3}{e^3} = \frac{e^6}{e^3} - \frac{e^3}{e^3} = e^3 - 1$

Exercice 7

Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

a. $e^x + e^{-x} = e^x \cdot (\dots + \dots)$

b. $\frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{e^{\dots}}{\dots} \right)^2$

c. $1 + e^{-x} = \frac{\dots + \dots}{e^x}$

d. $\frac{1 + e^x}{e^{2x}} = \dots + \dots$

e. $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{1 - \dots}{1 + \dots}$

f. $e^{16x} = (e^{\dots})^2$

Correction 7

a. $e^x + e^{-x} = e^x \cdot \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{e^x} \right) = e^x \cdot (1 + e^{-2x})$

b. $\frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{2 \cdot \frac{x}{2}}}{x^2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}})^2}{x^2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \right)^2$

c. $1 + e^{-x} = \frac{e^x \cdot (1 + e^{-x})}{e^x} = \frac{e^x + e^0}{e^x} = \frac{e^x + 1}{e^x}$

d. $\frac{1 + e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} + \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} + e^{-x}$

e. $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{e^{3x} \cdot (1 - e^{-2x})}{e^{3x} \cdot (1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$

f. $e^{16x} = e^{2 \times 8x} = (e^{8x})^2$