Utilisation de la dérivée, optimisation.

Exercice 1*

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
3. a. Déterminer le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$..
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{h \mapsto -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{h \mapsto +\infty} f(x) = 0$
4. En déduire les extrémums de la fonction f.

Correction 1

1. Pour montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que le polynôme du dénominateur ne s'annule pas.

   Ce polynôme admet pour discriminant :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times3\times1 = 4 - 12 = -8 < 0$
   Il n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.
   On a en déduit : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. L'expression de la fontion f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définie par :
   $u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v(x) = 3x^2+2x+1$
   qui admette pour dérivée :
   $u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 6x+2$

   Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} \\
&= \frac{2\times(3x^2+2x+1) - (2x+1)\times(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{6x^2+4x+2 - (12x^2+4x+6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{6x^2+4x+2 - 12x^2 - 10x - 2}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{-6x^2-6x}{(3x^2+2x+1)^2}
\end{aligned}$$

3. a. La fonction f' admet la forme factorisée suivante :
   $$f'(x) = \frac{-6x^2-6x}{(3x^2+2x+1)^2} = \frac{-6x\cdot(x+1)}{(3x^2+2x+1)^2}$$
   Le dénominateur étant positif, le signe de f' ne dépend que de son numérateur qui s'annule en 0 et -1. Le coefficient du second degré du polynôme définissant le numérateur du quotient est négatif. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   b. On a le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Ansi, la fonction f admet :
   - pour minimum $-\dfrac{1}{2}$, et atteint son minimum pour $x=-1$;
   - pour maximum 1, et atteint son maximum pour $x=0$;

Exercice 2

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
   $$f'(x) = \frac{7x^2+14x}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \dfrac{3}{2} \quad ; \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$
3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

Correction 2

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son discriminant est :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times2\times1 = -7$
   Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :
   $u(x) = 3x^2-2x-2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2+x+1$
   qui admettent pour dérivée les fonctions :
   $u'(x) = 6x-2 \quad ; \quad v'(x) = 4x+1$
   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(6x-2)\cdot(2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2)\cdot(4x+1)}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$
$$= \frac{(12x^3{+}6x^2{+}6x{-}4x^2{-}2x{-}2){-}(12x^3{+}3x^2{-}8x^2{-}2x{-}8x{-}2)}{\big(2x^2{+}x{+}1\big)^2}$$
$$= \frac{\big(12x^3+2x^2+4x-2\big) - \big(12x^3-5x^2-10x-2\big)}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$
$$= \frac{7x^2+14x}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$

b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :

$7x^2+14x = 7x(x+2)$

Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Effectuons les calculs suivantes :

- $f(-2) = \dfrac{3\times(-2)^2 - 2\times(-2) - 2}{2\times(-2)^2+(-2)+1} = \dfrac{14}{7} = 2$
- $f(0) = \dfrac{3\times0^2 - 2\times0 - 2}{2\times0^2+0+1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Variation de f	$-\frac{3}{2}$	2	-2	$\frac{3}{2}$

3. Puisque $2 > \dfrac{3}{2}$ et $-2 < -\dfrac{3}{2}$ et d'après le tableau de variation :

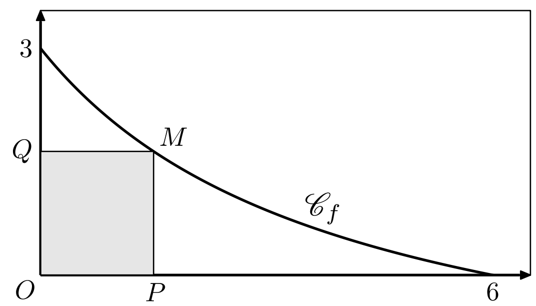
- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x=-2$;
- -2 est la minimum de la fonction f et il est atteint pour $x=0$;

Exercice 3*

On considère la fonction f définie sur $\big[0\,;6\big]$ par :

$$f(x) = \frac{12-2x}{x+4}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. On considère les points P et Q appartenant respectivement à l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de sorte à ce que le quadrilatère $OPMQ$ soit un rectangle.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale.

Correction 3

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$. Le point M a pour coordonnées :

$M\big(x\,;f(x)\big)$

Les points P et Q ont pour coordonnées :

$P(x\,;0) \quad ; \quad Q\big(0\,;f(x)\big)$

On en déduit que le rectangle $OPMQ$ a pour dimensions x et $f(x)$. Ainsi, l'aire hachurée a pour expression :

$$\mathcal{A}(x) = OP\times OQ = x\times f(x) = x\times\frac{12-2x}{x+4} = \frac{12x-2x^2}{x+4}$$

L'expression de cette fonction est donnée sous la forme :

$u(x) = 12x-2x^2 \quad ; \quad v(x) = x+4$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 12-4x \quad ; \quad v'(x) = 1$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(12-4x)(x+4) - (12x-2x^2)\cdot 1}{(x+4)^2}$$
$$= \frac{(12x+48-4x^2-16x) - (12x-2x^2)}{(x+4)^2}$$
$$= \frac{-4x^2{-}4x{+}48{-}12x{+}2x^2}{(x{+}4)^2} = \frac{-2x^2{-}16x{+}48}{(x{+}4)^2}$$

Le dénominateur du quotient étant strictement positif sur $\big[0\,;\,6\big]$, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que de son numérateur. Ce polynôme a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-16)^2-4\times(-2)\times48 = 256+384 = 640$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{640} = \sqrt{64\times10} = 8\sqrt{10}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-16)-8\sqrt{10}}{2\times(-2)} = \frac{16-8\sqrt{10}}{-4} = \frac{-4\cdot(2\sqrt{10}-4)}{-4} = 2\sqrt{10}-4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-16)+8\sqrt{10}}{2\times(-2)} = \frac{16+8\sqrt{10}}{-4} = \frac{-4\cdot(-2\sqrt{10}-4)}{-4} = -2\sqrt{10}-4$$

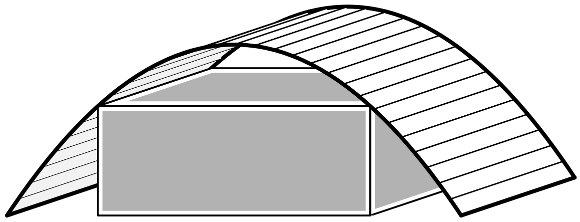
Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on en déduit son signe et ainsi le signe de la fonction f' sur $\big[0\,;6\big]$.

Le signe de la fonction $\mathcal{A}'$ permet également de connaître les variations de la fonction $\mathcal{A}$:

x	0		$2\sqrt{10}-4$		6
Signe de $\mathcal{A}'$		$+$	0	-	
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

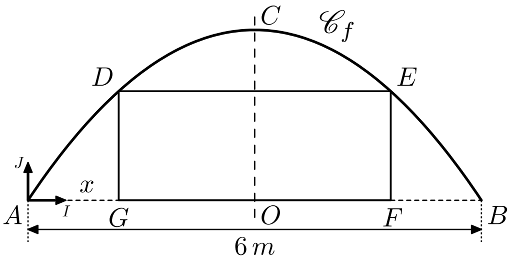
Exercice 4

Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.

Dans le repère $(A\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x$$

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x exprimée en mètre ?

2. Démontrer que pour $x \in [0\,;3]$:
$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 + 9\cdot x$$

3. a. Déterminer le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0\,;3]$.

   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

Correction 4

1. x représente la mesure de la longueur AG : x doit être positif.

   La droite (CO) étant un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit la mesure $AO = 3\,m$.
   Le point G appartenant au segment $[AO]$, on en déduit que la longueur AO ne peut dépasser $3\,m$.

   On en déduit que la variable x prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;3]$.

2. Le rectangle $DEFG$ a pour longueur GF et pour hauteur GD.
   - On a :
   $$\begin{aligned} AG + GF + FB &= 6 \\ x + GF + x &= 6 \\ GF &= 6 - 2x \end{aligned}$$
   - Le point D est le point d'abscisse x appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$. Il a pour coordonnées $(x\,;f(x))$.
   Le point G est un point de l'axe des abscisse ayant x pour abscisse. Il a pour coordonnées $G(x\,;0)$.
   On en déduit la mesure de la longueur : $DG = f(x)$.

   Ainsi, le rectangle $DEFG$ a pour aire :
   $$\mathcal{A}(x) = L\times\ell = (6-2x)\times f(x) = (6-2x)\times\Big(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big)$$
   $$= -\frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x$$

3. a. La fonction $\mathcal{A}$ admet pour fonction dérivée :
   $$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\cdot(3x^2) - \frac{9}{2}\cdot(2x) + 9 = \frac{3}{2}\cdot x^2 - 9x + 9$$
   Le polynôme du second degré définissant la fonction $\mathcal{A}'$ admet pour discriminant :
   $$b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-9)^2 - 4\times\frac{3}{2}\times 9 = 81 - 54 = 27$$
   On a la simplification suivante :
   $$\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$$
   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)-3\sqrt{3}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{3} = 3-\sqrt{3}$$
   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)+3\sqrt{3}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{9+3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{3} = 3+\sqrt{3}$$
   Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{2}\cdot x^2-9x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$ et le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\,;3]$:

x	0		$3-\sqrt{3}$		3
Signe de $\mathcal{A}'$		$+$	0	-	
Variation de $\mathcal{A}$	0	↗		↘	0

b. On en déduit que l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale lorsque le point G a pour abscisse $3-\sqrt{3}$.

