Formules dérivées.

Exercice 1*

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \mapsto (2x^2-1)(4x-1)$ b. $g\colon x \mapsto (5x^4-x+1)(3-2x^2)$

c. $h\colon x \longmapsto (3-x)\cdot\dfrac{1}{x}$ d. $j\colon x \longmapsto (x^2-3)\cdot\sqrt{x}$

Correction 1

a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 2x^2-1 \quad ; \quad v(x) = 4x-1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 4x \quad ; \quad v'(x) = 4$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 4x\cdot(4x-1) + (2x^2-1)\cdot 4$$
$$= 16x^2-4x+8x^2-4 = 24x^2-4x-4$$

b. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 5x^4-x+1 \quad ; \quad v(x) = 3-2x^2$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 20x^3-1 \quad ; \quad v'(x) = -4x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (20x^3-1)(3-2x^2) + (5x^4-x+1)(-4x)$$
$$= (60x^3-40x^5-3+2x^2) + (-20x^5+4x^2-4x)$$
$$= -60x^5+60x^3+6x^2-4x-3$$

c. L'expression de la fonction h est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 3-x \quad ; \quad v(x) = \dfrac{1}{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction h' dérivée de la fonction h :
$$h'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= -1\times\frac{1}{x} + (3-x)\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = -x - \frac{3-x}{x^2}$$
$$= -\frac{x^3}{x^2} - \frac{3-x}{x^2} = \frac{-x^3-(3-x)}{x^2} = \frac{-x^3+x-3}{x^2}$$

d. L'expression de la fonction j est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2-3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction j' dérivée de la fonction j :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4x^2+x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f\colon x \longmapsto \dfrac{2-2x}{5x+1}$ b. $g\colon x \longmapsto (3x-2)(2x^2+1)$

c. $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{3x+1}$ d. $j\colon x \longmapsto (2x^2+3x)\cdot\sqrt{x}$

Correction 2

a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = 2-2x \quad ; \quad v(x) = 5x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = -2 \quad ; \quad v'(x) = 5$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{-2\cdot(5x+1)-(2-2x)\times 5}{(5x+1)^2} = \frac{-10x-2-(10-10x)}{(5x+1)^2}$$
$$= \frac{-10x-2-10+10x}{(5x+1)^2} = \frac{-12}{(5x+1)^2}$$

b. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 3x-2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = 4x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée de g :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 3\cdot(2x^2+1) + (3x-2)\cdot 4x = 6x^2+3+12x^2-8x$$
$$= 18x^2-8x+3$$

c. L'expression de la fonction h est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = 3x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = 3$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :
$$h'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{0\cdot(3x+1)-1\times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

d. L'expression de la fonction j est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 2x^2+3x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 4x+3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée de j :

$$j'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (4x+3)\cdot\sqrt{x} + (2x^2+3x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= (4x+3)\cdot\frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2+3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= (4x+3)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2+3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(8x^2+6x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2+3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{8x^2+6x+2x^2+3x}{2\sqrt{x}} = \frac{10x^2+9x}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 3

On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x) = \big(x^2-3x\big)\cdot\sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3-2x}{x^2-3x-1}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g'. *(On donnera l'expression de la fonction f' sous la forme d'un quotient simplifié).*

Correction 3

1. La fonction f est définie par :
$$f(x) = \big(x^2-3x\big)\cdot\sqrt{x}$$
L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = x^2-3x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 2x-3 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=(2x-3)\cdot\sqrt{x}+(x^2-3x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(2x-3)\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x\cdot(2x-3)+x^2-3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4x^2-6x+x^2-3x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2-9x}{2\sqrt{x}}$$

2. L'expression de la fonction f est :
$$g(x) = \frac{3-2x}{x^2-3x-1}$$
qui est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :
$$u(x) = 3-2x \quad ; \quad v(x) = x^2-3x-1$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = -2 \quad ; \quad v'(x) = 2x-3$$
La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :
$$g'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{-2\cdot(x^2-3x-1)-(3-2x)\cdot(2x-3)}{\big(x^2-3x-1\big)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+6x+2-(6x-9-4x^2+6x)}{\big(x^2-3x-1\big)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+6x+2-6x+9+4x^2-6x}{\big(x^2-3x-1\big)^2}$$
$$= \frac{2x^2-6x+11}{\big(x^2-3x-1\big)^2}$$

Exercice 4

1. On considère les deux fonctions f et g par :
$$f(x) = (2x+1)(3x^2-x+1) \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+5}{1-4x}$$
Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.

2. On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation :
$$h(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
   b. Montrer que le nombre de dérivée de h en x s'exprime par :
$$h'(x) = -\frac{3x^2-10x+7}{(x^2-5x+6)^2}$$

Correction 4

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v(x) = 3x^2-x+1$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 6x-1$$
La formule de dérivation d'un produit permet de définir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 2(3x^2-x+1) + (2x+1)(6x-1)$$
$$= 6x^2-2x+2+\big(12x^2+4x-1\big)$$
$$= 18x^2+2x+1$$
   b. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = 2x+5 \quad ; \quad v(x) = 1-4x$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = -4$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{2\cdot(1-4x) - (2x+5)\cdot(-4)}{\big(1-4x\big)^2} = \frac{2-8x-(-8x-20)}{\big(1-4x\big)^2}$$
$$= \frac{2-8x+8x+20)}{\big(1-4x\big)^2} = \frac{22}{\big(1-4x\big)^2}$$

2. a. Pour qu'un quotient soit défini, il faut que son dénominateur.

Etudions le polynôme x^2-5x+6. Ce polynôme admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 25-24 = 1$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-1}{2\times1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+1}{2\times1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction h :

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\backslash\big\{2\,;3\big\}$

b. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un quotient où :

$u(x) = x^2-2x+1 \quad ; \quad v(x) = x^2-5x+6$

qui admettent pour dérivée les deux fonctions :

$u'(x) = 2x-2 \quad ; \quad v'(x) = 2x-5$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$h'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(2x-2)(x^2-5x+6)-(x^2-2x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{2x^3\text{-}10x^2\text{+}12x\text{−}2x^2\text{+}10x\text{-}12\text{-}(2x^3\text{-}5x^2\text{-}4x^2\text{+}10x\text{+}2x\text{-}5)}{(x^2\text{-}5x\text{+}6)^2}$$
$$= \frac{2x^3-12x^2+22x-12-(2x^3-9x^2+12x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{2x^3-12x^2+22x-12-2x^3+9x^2-12x+5)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{-3x^2+10x-7}{(x^2-5x+6)^2} = -\frac{3x^2-10x+7}{(x^2-5x+6)^2}$$

