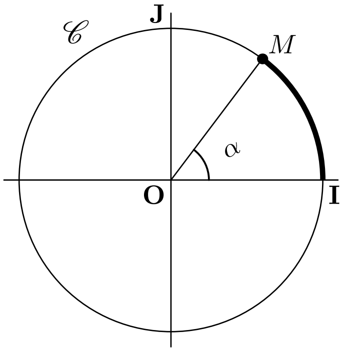
Trigonométrie

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère un cercle de centre O et de rayon 1 *(ce cercle passe par les points I et J)*.
Un point M du cercle est repéré par la mesure de l'angle $\widehat{MOI}$



1. a. Donner la mesure de la circonférence du cercle.
   b. Compléter le tableau suivant :

Valeur de α	0	360	180	90
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$				

   c. Que peut-on dire du tableau ci-dessus?

2. A l'aide de la proportionnalité, compléter le tableau ci-dessous :

Valeur de α	36	45	60	30
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$				

Correction 1

1. a. Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon 1. Ainsi, sa circonférence a pour mesure :
   $\mathcal{P} = 2{\cdot}\pi{\cdot}r = 2{\cdot}\pi{\times}1 = 2{\cdot}\pi$
   b. Voici le tableau complété :

Valeur de α	0	360	180	90
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$

   c. Ce tableau représente une situation de proportionnalité entre l'angle au centre définissant un arc du cercle $\mathscr{C}$ et la mesure de cet arc.

2. Voici le tableau complété :

Valeur de α	36	45	60	30
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Exercice 2

1. Déterminer la mesure exacte en radian des angles suivants :
   a. 90^o b. 60^o c. 45^o
   d. 30^o e. 72^o f. 1^o

2. Déterminer la mesure exacte en degré des angles suivants :
   a. $\frac{\pi}{2}$ rad b. $\frac{\pi}{3}$ rad c. $\frac{\pi}{6}$ rad
   d. $\frac{3{\cdot}\pi}{5}$ rad e. $\frac{\pi}{12}$ rad f. $\frac{3{\cdot}\pi}{4}$ rad

3. Compléter les pointillés ci-dessous avec les valeurs adéquates, approchées au millième près :
   a. $66^o \approx \ldots$ rad b. $137^o \approx \ldots$ rad
   c. $2\,\text{rad} \approx \ldots{}^o$ d. $0{,}69\,\text{rad} \approx \ldots{}^o$

Correction 2

1. Voici le tableau représentant une situation de proportionnalité :

Mesure en degré	90	60	45	30	72	1
Mesure en radian	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{180}$

$x \downarrow x\times\frac{\pi}{180}$

2. Voici le tableau représentant une situation de proportionnalité :

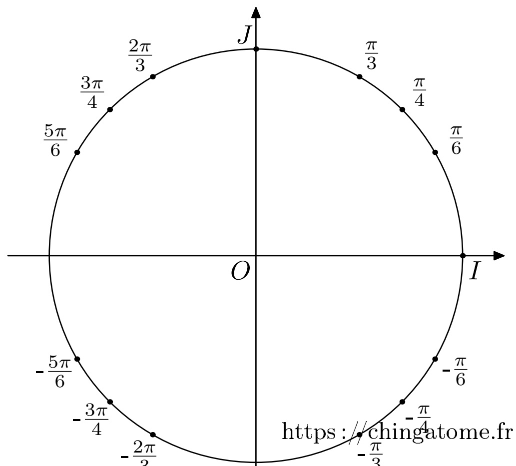
Mesure en radian	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3{\cdot}\pi}{5}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3{\cdot}\pi}{4}$
Mesure en degré	90	60	30	108	30	135

$x \downarrow x\times\frac{180}{\pi}$

3. a. $66^o \approx 1{,}15191 \approx 1{,}152\,\text{rad}$
   b. $137^o \approx 2{,}39110 \approx 2{,}391\,\text{rad}$
   c. $2\,\text{rad} \approx 114{,}59155 \approx 114{,}592^o$
   d. $0{,}69\,\text{rad} \approx 39{,}53408 \approx 39{,}534^o$

Exercice 3

On munit le plan d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on considère le cercle trigonométrique ci-dessous :



où sont représentés les points M du cercle trigonométrique dont la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est un angle remarquable.

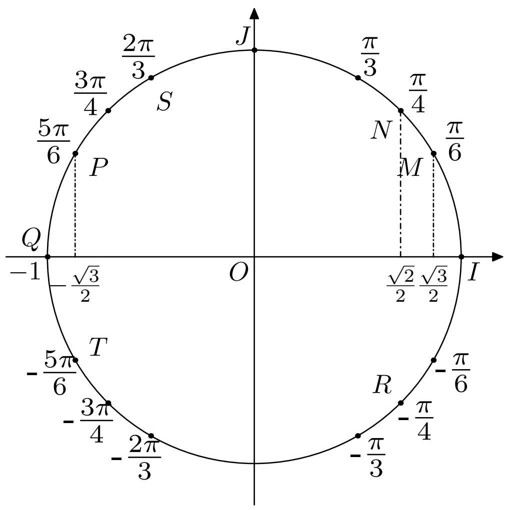
Donner la valeur exacte des rapports ci-dessous :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ b. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d. $\cos\left(\pi\right)$

e. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ g. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Correction 3

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



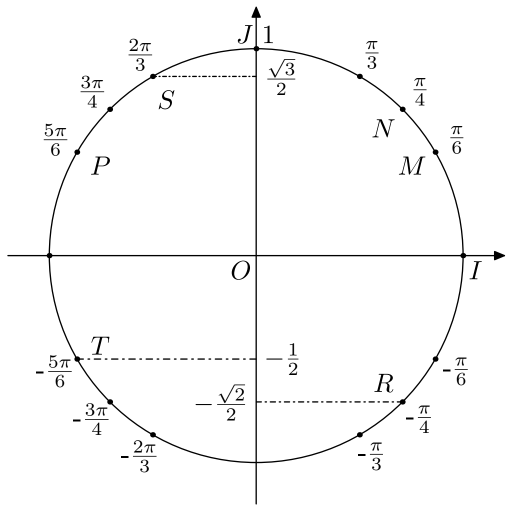
a. Le point M est repéré par l'angle $\frac{\pi}{6}$. L'abscisse du point M a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Le point N est repéré par l'angle $\frac{\pi}{4}$. L'abscisse du point N a pour valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. Le point P est repéré par l'angle $\frac{5\pi}{6}$. L'abscisse du point P a pour valeur $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Le point Q est repéré par l'angle π. L'abscisse du point Q a pour valeur -1.
On en déduit : $\cos\left(\pi\right) = -1$

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



e. Le point R est repéré par l'angle $-\frac{\pi}{4}$. L'ordonnée du point R a pour valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. Le point S est repéré par l'angle $\frac{2\cdot\pi}{3}$. L'ordonnée du point S a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g. Le point T est repéré par l'angle $-\frac{5\pi}{6}$. L'ordonnée du point T a pour valeur $-\frac{1}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

h. Le point J est repéré par l'angle $\frac{\pi}{2}$. L'ordonnée du point J a pour valeur 1.
On en déduit : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Exercice 4

1. Tracer un cercle trigonométrique et placer les points suivants dont le repérage par leur mesure principale :

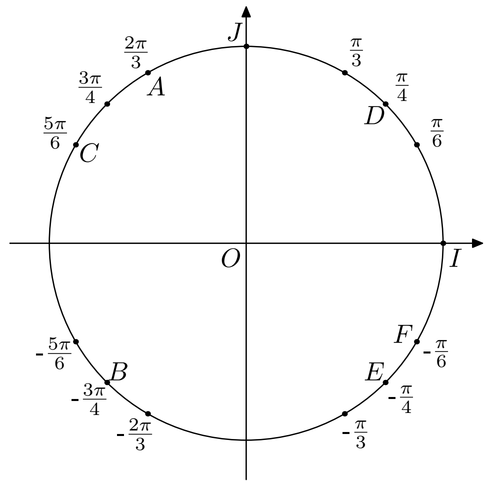
   a. $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $B\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ c. $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

   d. $D\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e. $E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f. $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

2. Préciser les valeurs du cosinus et du sinus associées à chacun des angles repérant les points précédents.

Correction 4

1. Voici les six points représentés sur le cercle trigonométrique :



2. Par lecture graphique, voici les valeurs des cosinus et des

sinus associées à chacun de ces six angles :

a. $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

d. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 5

Formule des angles associés

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Simplifier chacune des expressions suivantes :

a. $\cos(x-\pi)$ b. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

c. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Correction 5

1. $\cos(x-\pi) = \cos\left[-(\pi-x)\right] = \cos(\pi-x) = -\cos x$

2. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right] = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
$= -\cos x$

3. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right] = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
$= \cos x$

4. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right] = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
$= -\sin x$

