

TP sur les développements limités.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 ; n est un entier naturel.

On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ s'appelle la partie régulière.

Propriété :

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0 , de partie régulière $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, alors f est dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente non verticale au point d'abscisse 0 , d'équation réduite $y = a_0 + a_1x$

Un développement limité se calcule à l'aide de logiciel de calcul formel et/ou de calculatrices CAS (T-inspire cas, casio GRAPH 100, etc)

Voici quelques commandes :

Sur **GEOGEBRA**, on utilise la commande **PolynômeTaylor**[<Fonction>, <Valeur x>, <Ordre>]

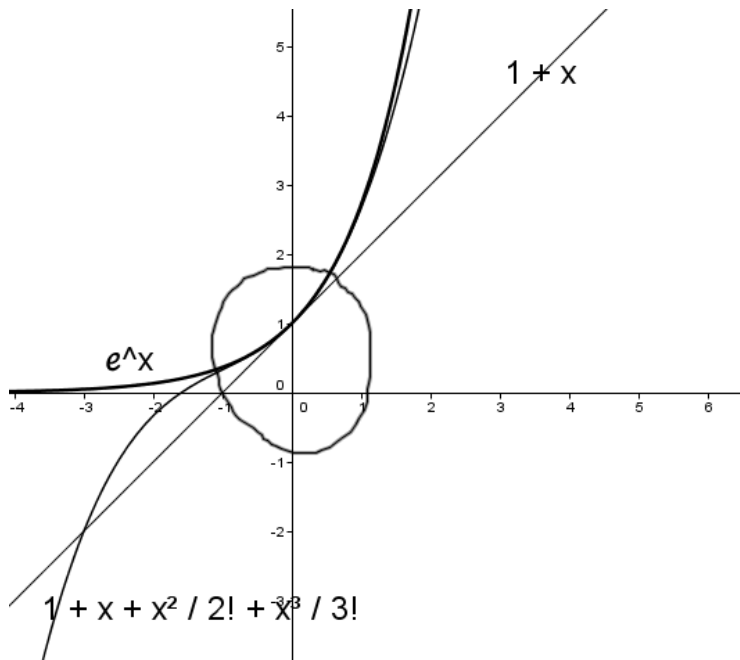
Avec **MAXIMA** :

```
(%i1) taylor(exp(x), x, 0, 3);  
(%o1) 1 + x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{6}$  + ...
```

Avec **Xcas** :

```
1 f(x) := exp(x)  
// Interprète f  
// Succès  
// lors de la compilation f  
x -> exp(x)  
2 series(f(x), 0, 3)  
1 + x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{6}$  + x^4 * order_size(x)
```

Exemple PolynômeTaylor[$\exp(x)$, 0, 3] avec GEOGEBRA pour trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $\exp(x)$



$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad \text{A savoir : } 2! = 2 \times 1 = 2 \quad \text{et} \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{Donc } \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Du développement limité de la fonction en 0, on peut en déduire les éléments suivants :

- L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $\exp(x)$ au point d'abscisse 0 est $y=x+1$
- De plus $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ développement limité en 0 à l'ordre 2.

$$\text{Donc } \exp(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

La fonction $\exp(x)$ est au dessus de sa tangente car $\frac{x^2}{2}$ est positif.

Le développement limité sert essentiellement à trouver l'équation de la tangente au point considéré et à trouver la position relative de la courbe de la fonction par rapport à sa tangente.

Quelques développements limités classiques (trouvés avec MAXIMA) :

```
(%i2) taylor(exp(x), x, 0, 5);
(%o2) 1 + x +  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$ 

(%i7) taylor(log(1+x), x, 0, 5);
(%o7) x -  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$ 

(%i8) taylor(sin(x), x, 0, 5);
(%o8) x -  $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$ 

(%i9) taylor(cos(x), x, 0, 5);
(%o9) 1 -  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$ 

(%i10) taylor(1/(1+x), x, 0, 5);
(%o10) 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...

(%i11) taylor((1+x)^2, x, 0, 5);
(%o11) 1 + 2 x + x^2 + ...

(%i13) taylor((1+x)^3, x, 0, 5);
(%o13) 1 + 3 x + 3 x^2 + x^3 + ...
```

En utilisant ces développements, donner les équations des tangentes en O, ainsi que leur position relative.

Un extrait du BTS 2013 :

3° Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f , à l'ordre 3, au voisinage de zéro : $f(x) = 0,25x - 0,03125x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

- a) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
- b) Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

Traiter les deux questions.

PARTIE INFORMATIQUE.

Dans MAXIMA, on cherche le développement limité de la fonction $\exp(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. On tape la commande suivante :

```
(%i1) taylor(exp(x), x, 0, 3);  
(%o1) 1+x+ $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots$ 
```

Dans XCAS :

```
1 f(x):=exp(x)  
// Interprète f  
// Succès  
// lors de la compilation f  
x -> exp(x)  
2 series(f(x), 0, 3)  
1+x+ $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^4*\text{order\_size}(x)$ 
```

Il faut interpréter l'affichage du logiciel et répondre de la façon suivante :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

En utilisant le même affichage écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0

Utiliser MAXIMA pour écrire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\exp(x)$

En utilisant le logiciel de votre choix,

- déterminer les développements limités ;
- déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse demandé ;
- Préciser la position de la tangente à la courbe au point d'abscisse demandé ;
- Vérifier avec GEOGEBRA

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ en 0 à l'ordre 4.}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \text{ en 0 à l'ordre 3.}$$

$$h(x) = (1 - 5x)e^{-2x} \text{ en 0 à l'ordre 2.}$$

$$t(x) = 1 - e^x + \frac{1}{2} \cos(x) \text{ au voisinage de 0 à l'ordre 2.}$$

$$l(x) = 0,25x \exp(-0,125x^2) \text{ à l'ordre 3 en 0}$$

$$t(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \text{ à l'ordre 2 au voisinage de 0}$$