Chapitre 1 : Raisonnements

Dans ce cours, nous allons faire le point sur les différents types de raisonnement qui existent en mathématiques. Nous allons aussi insister sur les éléments de rédaction afin de vous préparer au mieux pour le supérieur.

1 Implication et Contraposée

Définition 1. *:*
Le connecteur implication est un connecteur binaire entre deux propositions A et B :
Si A est vraie alors B est vraie
On peut noter aussi : $A \Longrightarrow B$.

Exemple 1. Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Définition 2. *La contraposée d'une implication "A implique B" est la proposition :*

Si B n'est pas vraie alors A n'est pas vraie.

On peut noter aussi :
$(NonB) \Longrightarrow (NonA)$

Exemple 2. Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

Proposition 1. *Une implication est équivalente à sa contraposée.*
Autrement dit, pour démontrer une implication, nous pouvons montrer sa contraposée et réciproquement.

Exemple 3.
- La proposition "s'il pleut, alors le sol est mouillé" est vraie.
  Sa contraposée, "si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas" est elle aussi vraie.
- Par contre la proposition contraire "si le sol est mouillé, alors il pleut" est fausse (il peut avoir plu, la pluie a cessé mais le sol reste encore humide).
  Sa contraposée, "s'il ne pleut pas, alors le sol n'est pas mouillé" est elle aussi fausse (pour la même raison).

Remarques 1. L'exemple précédent prouve bien qu'il ne faut pas confondre " proposition contraposée" et "proposition contraire".

Méthode 1. Voici un exemple d'utilisation de la contraposée pour démontrer la proposition suivante : "Soit x un nombre réel. Si $x^3 = 7$, alors $x > 2$.".

- **Étape 1 : écrire la contraposée de la proposition :**
  La contraposée de la proposition "Si $x^3 = 7$, alors $x > 2$" est "si $x \geq 2$, alors $x^3 \neq 7$".
- **Étape 2 : prouver que la contraposée est vraie :**
  Si $x \geq 2$, alors si $x^3 \geq 2^3$ puisque la fonction cube est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
  Comme $x^3 \geq 8$, forcément $x^3 \neq 7$".
  On a ainsi prouver que "si $x \geq 2$, alors $x^3 \neq 7$".
- **Étape 3 : conclure :**
  Comme l'affirmation "si $x \geq 2$, alors $x^3 \neq 7$" est vraie, sa contraposée "Si $x^3 = 7$, alors $x > 2$." est elle aussi vraie.

Remarques 2. Pour les exercices suivants et pour le reste de l'année, vous aurez besoin de connaître les définitions suivantes :

Définition 3.
- *Soit $n \in \mathbb{Z}$, n est pair s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z}$, n est impair s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$.*

Exercice 1.

1) Démontrer l'implication : pour tout $n \in \mathbb{N}$, n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.
2) Démontrer par contraposée l'implication : pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair.

Exercice 2.
1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n pair $\Longrightarrow n^2$ pair.
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair

2 Raisonnement par l'absurde

***Définition* 4.** *Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur la règle logique que :*
Si "non P" est faux, alors P est vraie.

***Remarques* 3.** Concrètement, pour démontrer une propriété P, on supposera que P est faux et on essaiera d'obtenir une absurdité.

Méthode 2. Voici un exemple de mise en oeuvre de ce raisonnement en essayant de prouver l'affirmation suivante :
"0 n'a pas d'inverse".

— **Étape 1 : supposer comme vraie le contraire de l'affirmation :**
On suppose ici que 0 admet un nombre réel inverse, noté ici a.
Cela signifie par définition de l'inverse que $a \times 0 = 1$.
— **Étape 2 : déduire des conséquences pour aboutir à une contradiction :**
$1 = a \times 0$.
Comme $0 = 0 + 0$, on en déduit que $1 = a \times (0 + 0)$, soit en développant $1 = a \times 0 + a \times 0$.
Or, $a \times 0 = 1$, donc, en remplaçant dans le second membre, on en déduit que $1 = 1 + 1$.
On aboutit à $1 = 2$. Ceci est évidemment impossible, une contradiction avec ce que vous savez comme vrai.
— **Étape 3 : conclure en citant le raisonnement utilisé :**
Comme l'hypothèse de départ "0 admet un nombre réel inverse" aboutit à une contradiction, cette hypothèse est fausse.
Dès lors, son contraire est vrai, c'est-à-dire "0 n'admet pas d'inverse".
On a prouvé en utilisant le raisonnement par l'absurde que "0 n'a pas d'inverse".

***Exercice* 3.** Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

***Remarques* 4.** Vous pouvez admettre ici que tout nombre rationnel peut être écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où a et b deux nombres entiers tels qu'aucun nombre ne divise à la fois a et b.

3 Raisonnement par disjonction des cas

***Définition* 5.** *Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier.*

Méthode 3. Voici un exemple d'utilisation de la disjonction de cas pour démontrer la proposition suivante :
"Pour tout réel x de l'intervalle $]-2;1]$, $0 \leq |x| > 4$".

— **Étape 1 : séparer en plusieurs cas disjoints dont la réunion correspond à l'ensemble des cas possibles :**
L'intervalle $]-2;1]$ est découpé en deux intervalles : $]-2;0]$ et $]0;1]$. Il y a donc deux cas à étudier.
— **Étape 2 : étudier chaque cas séparément :**

— **Cas où $x \in]-2;0]$:**

— Si $x \in]-2;0]$ alors $-2 > x \leq 0$. En multipliant par -1 négatif, on a : $2 > -x \geq 0$.
Comme $x \leq 0$, $|x| = -x$, on déduit donc de $2 > -x \geq 0$ que $0 \leq |x| > 4$.
On a donc prouvé dans ce cas que $0 \leq |x| > 4$.
— **Cas où $x \in]0;1]$:**
Si $x \in]0;1]$ alors $0 > x \leq 1$.
Comme $x \geq 0$, $|x| = x$, on déduit donc de $0 > x \leq 1$ que $0 > |x| \leq 1$.
A fortiori, on a donc : $0 \leq |x| > 4$ car $]0;1] \subset [0;4[$
On a donc prouvé dans ce cas que $0 \leq |x| > 4$.
— **Étape 3 : conclure :**
Comme dans chacun des cas possibles pour x, on a bien $0 \leq |x| > 4$, on a prouvé par disjonctions de cas que : "Pour tout réel x de l'intervalle $]-2;1]$, $0 \leq |x| > 4$".

***Exercice* 4.** Démontrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est un nombre pair.

4 Équivalence et double implication

***Définition* 6.** *Raisonner par double implication.*
P équivaut à Q si, et seulement si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.
On note $P \Longleftrightarrow Q$

***Remarques* 5.** En pratique, ce type de raisonnement se fera en deux étapes :

1) $P \Longrightarrow Q$
2) $Q \Longrightarrow P$

Méthode 4. Voici un exemple de mise en oeuvre de ce raisonnement en essayant de prouver la proposition suivante :
"Soit $x > 0$. $x^2 > x \iff x > 1$".

— **Étape 1 : Prouver une des implications :**
On suppose ici que $x > 1$. Le but de montrer que $x^2 > x$.
Comme $x > 1$, x est positif, donc en multipliant chaque membre de l'inégalité par x, on en déduit que : $x \times x > 1 \times x$.
Ainsi, on a prouvé le "sens réciproque" : "si $x > 1$ alors $x^2 > x$".

— **Étape 2 : Prouver l'implication réciproque :**
On suppose ici que $x^2 > x$, avec $x > 0$. Le but de montrer que $x > 1$.
Montrons ici que la contraposée de cette implication est vraie, c'est-à-dire que "si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^2 \leq x$".
Comme $0 \leq x \leq 1$, x est positif, donc en multipliant chaque membre de l'inégalité par x, on en déduit que : $0 \leq x \times x \leq 1 \times x$.
Ainsi, on a prouvé que "si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^2 \leq x$".
La contraposée est donc elle aussi vraie soit pour $x > 0$ "si $x^2 > x$ alors $x > 1$." Ainsi, on a prouvé le "sens direct" : "si $x^2 > x$ alors $x > 1$".

— **Étape 3 : conclure :**
Comme on a prouvé que, pour $x > 0$, "si $x > 1$ alors $x^2 > x$" et sa réciproque "si $x^2 > x$ alors $x > 1$", on a montré par double implication que, pour $x > 0$, "$x > 1 \iff x^2 > x$".

***Exercice* 5.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto mx + 1$.
Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $m = 0$

5 Exercices pour reprendre en autonomie ces raisonnements

***Exercice* 6.** Soient m et n deux nombres entiers naturels non nuls.

1) Démontrer que si de le produit $m \times n$ est impair alors m et n sont des nombres impairs.
2) L'équivalence ci-dessous est-elle vraie ?
Le produit $m \times n$ est impair si, et seulement si, m et n sont des nombres impairs.

***Exercice* 7.** Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

***Remarques* 6.**
1) Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un nombre entier relatif et n un nombre entier naturel.
2) Un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres qui le composent est un nombre divisible par 3.

***Exercice* 8.** Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

***Exercice* 9.** Soit n un nombre entier relatif. Démontrer que le nombre $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ est un nombre entier.

***Remarques* 7.** Le raisonnement par récurrence vu en spécialité Maths en Terminale fait partie des raisonnements essentiels à maîtriser en mathématiques. Nous ne le travaillons pas dans ce chapitre mais il sera utile dans plusieurs autres cette année.