C2 : Forme algébrique et géométrie. Forme trigonométrique.

1 Demander le programme

- **Nombres complexes : point de vue géométrique**

Contenus

- Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.
- Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
- Relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un inverse.
- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module *1*. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.
- Forme trigonométrique.

Capacités attendues

- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.
- Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.

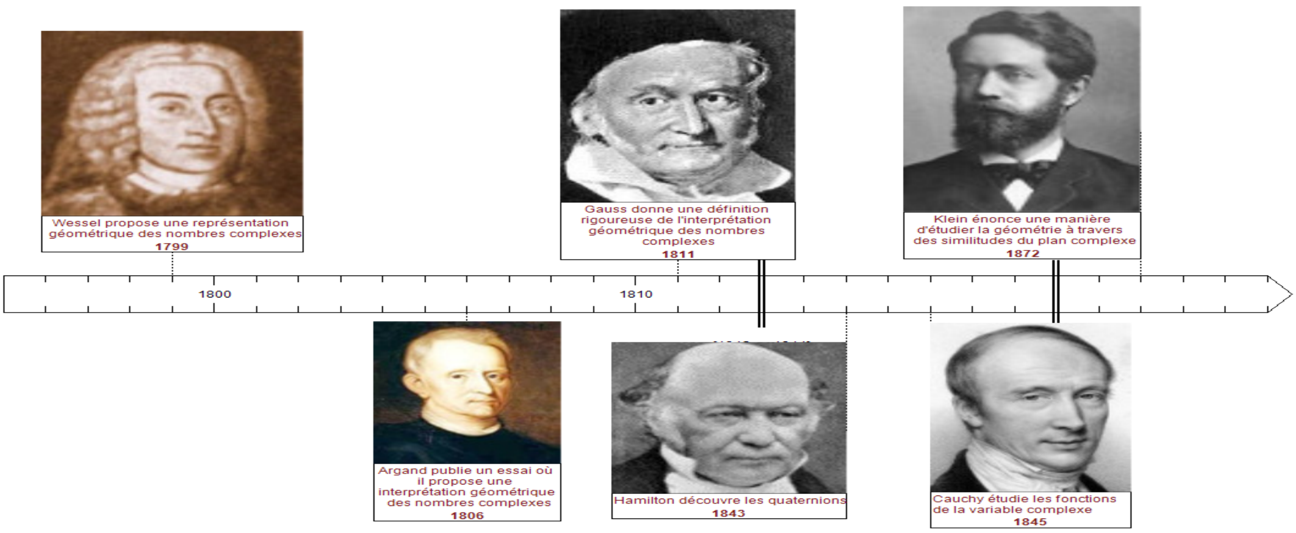
Démonstrations

- Formule $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit. Module d'une puissance.

Problèmes possibles

- Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$.
- Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.
- Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia.

Voici une frise historique présentant les premiers mathématiciens qui ont travaillé sur la représentation et l'interprétation géométrique des nombres complexes :
Voici une frise historique présentant les premiers mathématiciens qui ont travaillé sur la représentation et l'interprétation géométrique des nombres complexes.



2 Représentation géométrique.

2.1 Affixe d'un point

***Définition* 1.**

- *On appelle plan complexe le plan muni d'un repère orthonormé* $(0; \vec{u}, \vec{v})$.
- *A tout nombre complexe* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *nombres réels, on associe le point* M *de coordonnées* $(x; y)$.
- *Réciproquement, à tout point* $M(x; y)$ *du plan complexe, on associe le nombre complexe* $z = x + iy$.

On dit que le point M *est le point image du nombre complexe* z *et que* z *est l'affixe du point* M.

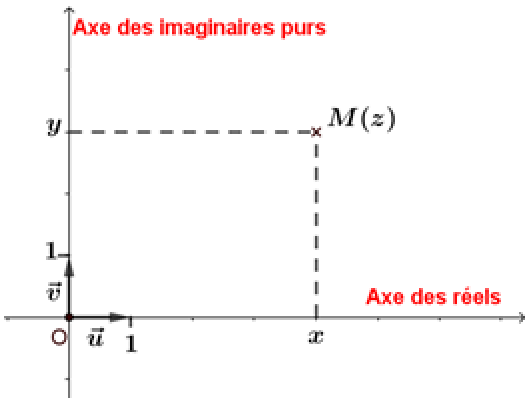
***Exemple* 1.**

- Le point $E(-2; 3)$ a pour affixe $-2 + 3i$.
- Le point image du nombre complexe $1 - i$ est le point $F(1; -1)$.

Notation et vocabulaire

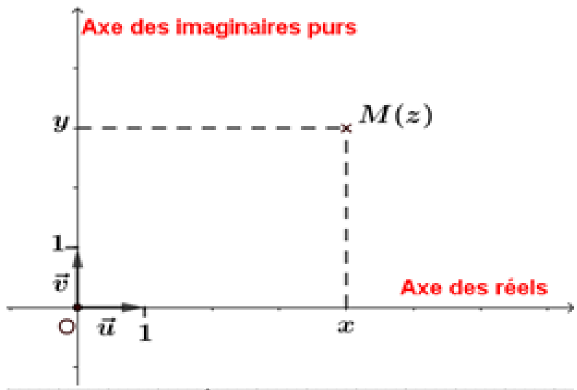
***Définition* 2.**

- *Pour indiquer que* $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R})$ *est l'affixe d'un point* M, *on note souvent* $M(z)$.
- *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi l'axe des réels.*
- *Les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi l'axe des imaginaires (purs).*



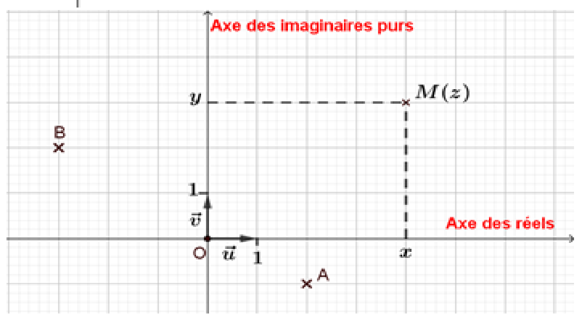
***Définition* 3.**

- *Pour indiquer que* $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R})$ *est l'affixe d'un point* M, *on note souvent* $M(z)$.
- *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi l'axe des réels.*
- *Les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi l'axe des imaginaires (purs).*

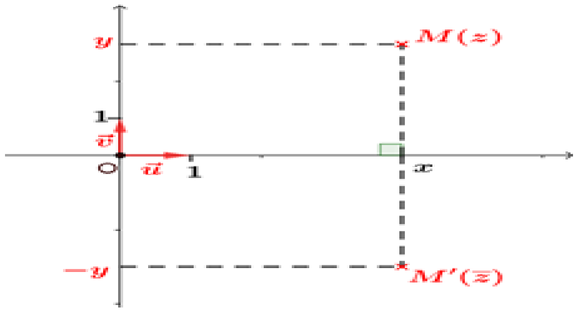


***Exemple* 2.**

- Le point A a pour affixe $2 - i$.
- Le point image du nombre complexe $-3 + 2i$ est le point B.

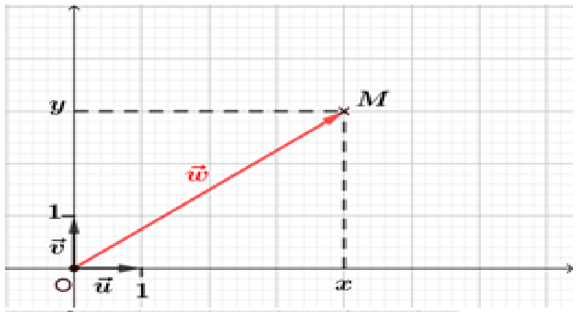


Proposition 1.
Le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
En effet si $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), alors $\overline{z} = x - iy$, donc M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

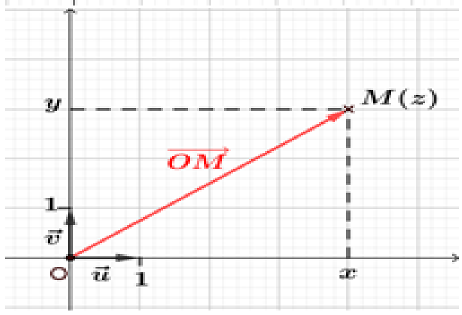


2.2 Affixe d'un vecteur

Définition 4.
Dans le plan complexe, $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées $(x; y)$.
Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$, donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $x + iy$.
On dit que le vecteur $\vec{w}$ est le vecteur image du nombre complexe z et que z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.



Remarques 1.
Soit M un point du plan complexe muni d'un repère d'origine O et z un nombre complexe.
Le point M a pour affixe z si, seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.

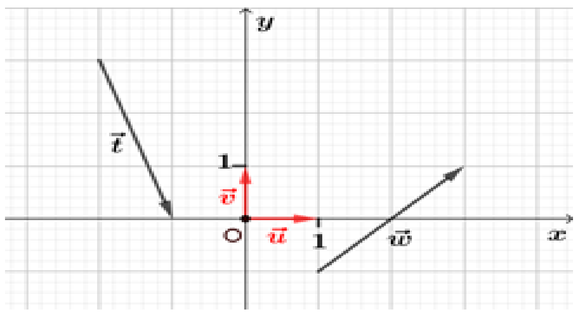


Remarques 2.

- l'affixe du point O l'origine d'un repère du plan complexe est 0.
- l'affixe du vecteur nul $\vec{0}$ est 0.

Exemple 3.

- Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $2 + 2i$.
- Le vecteur image du nombre complexe $1 - 3i$ est le vecteur $\vec{t}$..



2.3 Propriétés

En utilisant les propriétés des coordonnées, on déduit les propriétés suivantes

Proposition 2.
Dans le plan complexe, on considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z' et k un réel.

1) *Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont égaux si, et seulement si, $z = z'$.*
2) *Le vecteur $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.*
3) *Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.*

Proposition 3.
Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

1) *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.*
2) *L'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est le nombre complexe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.*

Démonstration.
Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B. Ces 2 propriétés découlent directement des propriétés sur les coordonnées des vecteurs et du milieu d'un segment :
On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OA}}$, Or, $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A$ et $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B$, Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_A - z_B$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$, alors :
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc $z_{\overrightarrow{AI}} = z_{\overrightarrow{IB}}$ soit $z_I - z_A = z_B - z_I$, ainsi $2z_I = z_B + z_A$, par conséquent, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$. □

Exercice 1.
Dans le plan complexe on donne les points A, B, C et D d'affixes : $z_A = -3 - i$, $z_B = 1 + i$ $z_C = 3 - 2i$ et $z_D = -1 - 4i$.

1) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe en utilisant la figure ci-dessous. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$?
2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2.
Dans le plan complexe on donne les points par leurs affixes $A(1)$, $B(-2\check{}i)$ et $C(4i)$.

1) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2) Déterminer l'affixe du point M, centre du parallélogramme ABCD.

Exercice 3.
Dans le plan complexe on donne les points A, B et C d'affixes : $z_A = -3 + 5i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = -i$.

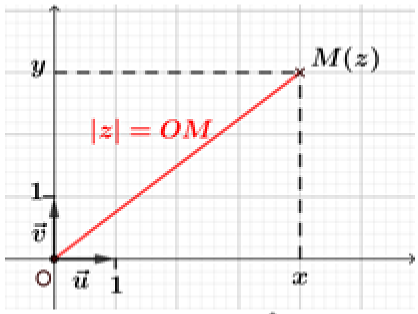
1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe en utilisant la figure ci-dessous et émettre une conjecture.
2) Démontrer ou invalider cette conjecture.

Exercice 4.
Dans le plan complexe, on note $\mathcal{E}$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2$ soit un réel.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$, puis le représenter graphiquement dans un repère orthonormé $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

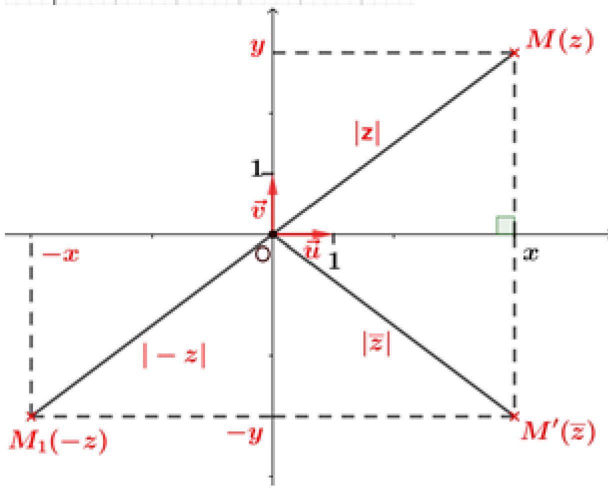
3 Module d'un nombre complexe

$(0; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

3.1 Définitions et propriétés



***Définition* 5.**
Soit M le point d'affixe z. Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM, c'est-à-dire $|z| = OM$.



***Proposition* 4.**
Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $|-z| = |z|$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $z\overline{z} = |z|^2$

Démonstration.
Soient z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) et $M(x; y)$ son point d'image, alors,
$|z| = OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$-z = -x + i(-y)$, donc $|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
$\overline{z} = x + i(-y)$, donc $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$. □

***Remarques* 3.**
Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- Si x est un nombre réel, le module de x est égal à la valeur absolue de x.
- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ car $OM = 0$ équivaut à $M = O$.

***Proposition* 5.**
Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
$AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan complexe, alors, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
On sait que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$,
et $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$, donc, $|z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$. □

***Exercice* 5.**

1) Dans le plan complexes, placer les points $A(6 - 3i)$, $B(15 + 2i)$ et $C(18 - 3i)$.
2) Que peut-on conjecturer quant à la nature du triangle ABC ?
3) Démontrer ou invalider cette conjecture.

***Exercice* 6.**

1) Dans le plan complexes, placer les points $D(2 - i)$, $E(6 - i)$ et $F\left(4 + (2\sqrt{3} - 1)i\right)$.
2) Montrer que le triangle DEF est équilatéral.
3) Calculer l'aire du triangle DEF.

Proposition 6.
Pour tous nombres complexes z, z' et tout nombre entier naturel $n \geq 1$.

1) $|zz'| = |z| \times |z'|$.
2) $|z^n| = |z|^n$.
3) $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$, *si* $z' \neq 0$.
4) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, *si* $z' \neq 0$.

Démonstration.
Pour tous nombres complexes z, z' et tout nombre entier naturel $n \geq 1$.

1) $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z||z'|)^2$. Or, $|zz'|$ et $|z||z'|$ sont deux réels positifs, donc $|zz'| = |z||z'|$.
2) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $|z^n| = |z|^n$:
   - Pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 1$, supposons que $|z^k| = |z|^k$ et montrons que $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$:
     Or, $|z^{k+1}| = |z^k \times z| = |z^k| \times |z| = |z|^k \times |z| = |z|^{k+1}$.
   - Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $|z^n| = |z|^n$.
3) Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$:
   Alors, $z' \times \dfrac{1}{z'} = 1$, donc $\left|z' \times \dfrac{1}{z'}\right| = 1$, soit $|z'| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = 1$, ainsi, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$.
4) Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$.
   Alors, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

□

Exercice 7.

1) Calculer le module de chacun des nombres complexes $\sqrt{3} + i$ et $1 - 2i$.
2) Déterminer alors le module de chaque nombre complexe :
   $z_1 = (\sqrt{3} + i)(1 - 2i)$, $z_2 = (\sqrt{3} + i)^3$, $z_3 = \dfrac{1}{1 - 2i}$ et $z_4 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{1 - 2i}$.

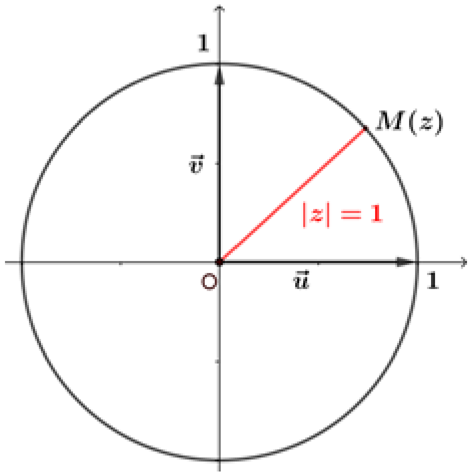
Exercice 8.
On donne les points A et B d'affixes $z_A = 2 + 5i$ et $z_B = -3i$. M désigne un point du plan complexe d'affixe z.

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, et $\overrightarrow{BM}$.
2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tel que : $|z - 2 - 5i| = |z + 3i|$.

Exercice 9.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne le point A d'affixe $1 - i$.

1) M est un point d'affixe z. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z du plan dont l'affixe vérifie $|z - 1 + i| = 2$.

3.2 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1



Définition 6.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$.
Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition 7.
Pour tous nombres complexes z et z' de l'ensemble $\mathbb{U}$:

1) $zz' \in \mathbb{U}$.
2) $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration.
Soient z et z' deux nombres complexes de l'ensemble $\mathbb{U}$:

1) $|zz'| = |z||z'|$, or $|z| = |z'| = 1$, donc $|zz'| = 1$ et zz' appartient à $\mathbb{U}$.
2) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, or, $|z| = 1$, donc, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ et $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

□

Exercice 10.
On considère le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

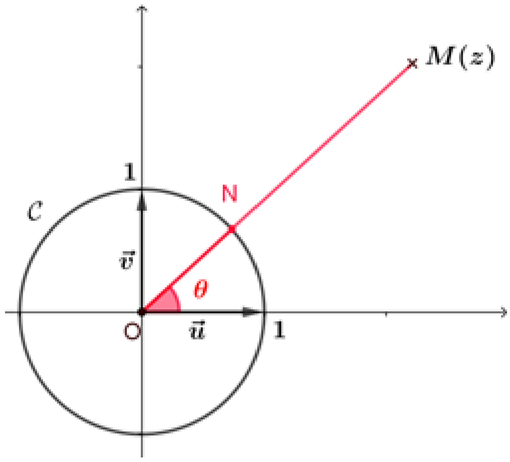
1) Donner une forme algébrique de j^2 et j^3.
2) Vérifier que ces nombres complexes appartiennent à $\mathbb{U}$.
3) Calculer $j + j^2 + j^3$.
4) On note P, Q et R les points images respectives de j, j^2 et j^3.
   Placer ces points dans le plan complexes en utilisant la figure ci-dessous.
5) Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

4 Arguments d'un nombre complexe

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

4.1 Définition et interprétation géométrique

$(0; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.



Définition 7.
Soit z un nombre complexe non nul de point image M du plan complexe, N est le point d'intersection du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et de la demi-droite $[OM)$.
On appelle argument de z et on note arg(z) tout nombre θ dont le point N est l'image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

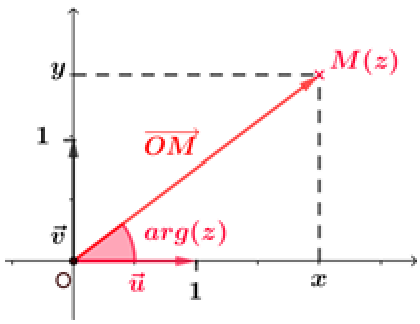
Remarques 4.
Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments. Si θ est un argument d'un nombre complexe z, tous les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note $\theta = arg(z)\ [2\pi]$ et on lit "θ égal argument de z modulo 2π"
- L'argument appartenant à $]-\pi; \pi[$ est appelé argument principal.

Interprétation géométrique

Proposition 8.
On se place dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- *Soient z un nombre complexe non nul et M le point image associé. $arg(z)$ est alors une mesure en radian de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.*
  On le note $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) = arg(z)\ [2\pi]$.
- *Soient z un nombre complexe non nul et $\vec{w}$ le vecteur image associé, On a $(\vec{u}; \vec{w}) = arg(z)\ [2\pi]$.*



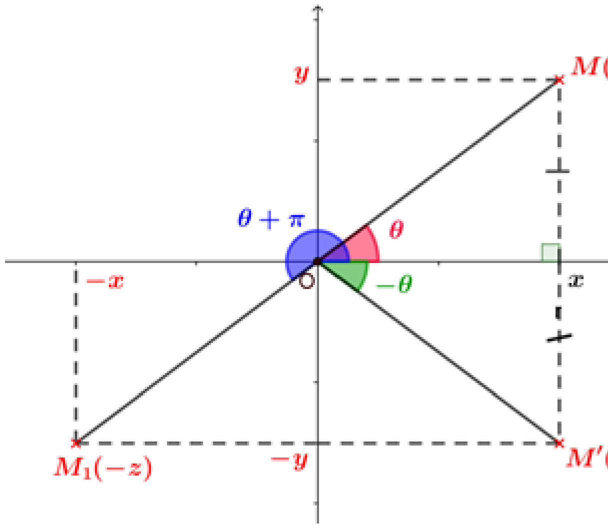
Démonstration. Cette propriété est une conséquence directe de la définition. □

Remarques 5. Le nombre complexe 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Exercice 11.

1) Dans le plan complexe, placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$, $-1 + i$.
2) Lire graphiquement un argument de chacun de ces nombres complexes.

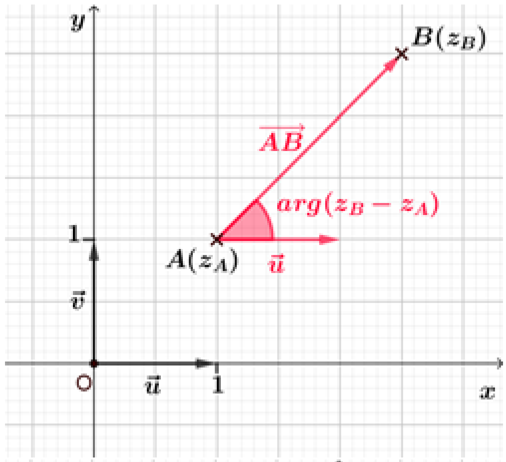
4.2 Premières propriétés des arguments



Proposition 9.
Pour tout nombre complexe non nul z et tout réel k non nul :

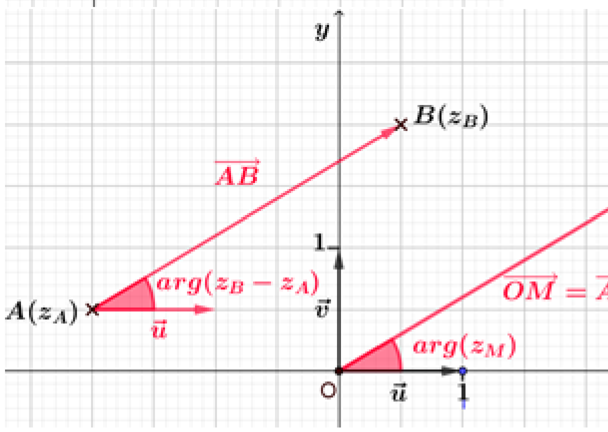
- $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$ *et* $arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$.
- *z est un nombre réel, si, seulement si,* $arg(z) = 0\ [2\pi]$ *ou* $arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
- *z est un nombre imaginaire pur, si, seulement si,* $arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *ou* $arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- *Si* $k > 0$ *alors* $arg(kz) = arg(z)\ \ [2\pi]$.
- *Si* $k < 0$ *alors* $arg(kz) = arg(z) + \pi\ \ [2\pi]$.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence directe des propriétés des mesures des angles orientés. □



Proposition 10.
Pour tout nombre complexe non nul z et tout réel k non nul :

1) *Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.*
On a $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.
2) *Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.*
On a $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A})[2\pi]$.

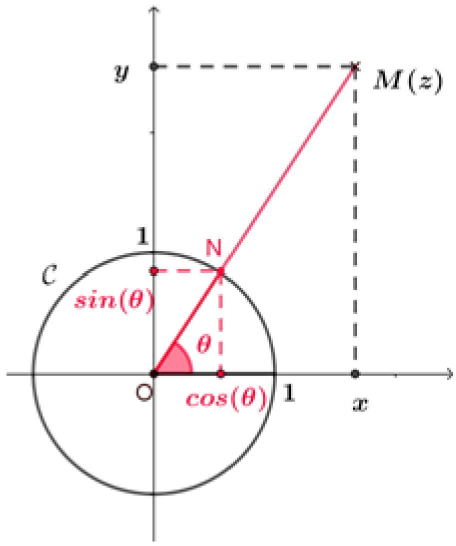


Démonstration.
Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
On note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et z_M l'affixe de ce point.
Alors, $z_M - z_O = z_B - z_A$, soit $z_M = z_B - z_A$.
De plus, $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = arg(z_M)\ [2\pi]$ soit, $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.
Or, $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$, donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$. □

Proposition 11.
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $x + iy$ (x et y réels).

- *Alors un argument de z est un réel θ tel que* $\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} \\ sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

Démonstration.
Soit $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe non nul dont un argument est θ.
M est le point image de z et N est le point d'intersection du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et la demi-droite $[OM)$. Donc, le point N a pour coordonnées $(cos(\theta); sin(\theta))$. Ainsi, l'affixe du point N est $z_N = cos(\theta) + isin(\theta)$.
Or, $|z| = OM$ et $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{OM}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{|z|}\overrightarrow{OM}$, donc $\overrightarrow{OM} = |z|\overrightarrow{ON}$, ainsi $z = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$, d'où, $x + iy = |z|cos(\theta) + i|z|sin(\theta)$, ainsi, $x = |z|cos(\theta)$, soit $cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ et $y = |z|sin(\theta)$, soit $sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$. □



Exercice 12.
Dans le plan complexe, placer les points A et B d'affixes respectives $3 + 3i$ et $-2 + 2i$.

1) Déterminer un argument de l'affixe de A, puis de B.
2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ et la nature du triangle AOB.

Exercice 13.
A et B sont les points du plan complexes : $z_A = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_B = \overline{z_A}$.

1) Déterminer un argument de l'affixe de chacun des points A et B.
2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
3) Démontrer que le triangle AOB est équilatéral.

Exercice 14.
A et B sont les points du plan complexes : $z_A = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_B = \overline{z_A}$.

1) (a) Déterminer un argument du nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.
   (b) Soit z_1 un nombre complexe tel que $|z_1| = 3$ et $arg(z_1) = \frac{3\pi}{2}$ $[2\pi]$. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z_1.
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   (a) Déterminer un argument du nombre complexe $z_2 = 1 + i$. On note M_2 le point d'affixe z_2.
   (b) Déterminer dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

4.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

***Définition* 8.**
z est un nombre complexe non nul.
L'écriture $z = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$ où $arg(z) = \theta$ $[2\pi]$ est appelée une forme trigonométrique de z.

***Proposition* 12.**
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $x + iy$ (x et y réels).

- *Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et même argument à un multiple de 2π près.*
- *Si $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ avec r un réel strictement positif alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$ $[2\pi]$.*

***Exercice* 15.**

1) Déterminer le module et un argument de chaque nombre complexe puis l'écrire sous forme trigonométrique :

(a) $z_1 = \frac{2}{5}i$ (b) $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ (c) $z_3 = -4i$ (d) $z_4 = -10$ (e) $z_5 = 2 - 2i\sqrt{3}$ (f) $z_6 = -1 + i$.

2) En déduire, sans calculs supplémentaires, une forme trigonométrique de $\overline{z_6}$ et $\sqrt{2}z_6$.

***Exercice* 16.**
Dans chaque cas, écrire sous forme algébrique le nombre complexe z.

1) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
2) $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
3) $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
4) $z = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

***Exercice* 17.**
z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et dont une forme trigonométrique est $z = r(\cos(\theta) + isin(\theta))$ avec $z = a + ib$ avec r et θ des réels et $r > 0$.
Voici une fonction **FT** qui :

- prend en paramètres deux nombres réels a et b qui correspondent respectivement aux parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z,
- renvoie le triplet ((**r**, **c**, **s**) correspondant respectivement au module de z, à $\cos(\theta)$ et à $\sin(\theta)$.

```
from math import *
def FT(a,b) :
    r = ...............................
    c =  ..............................
    s = ...............................
    return r, c, s
```

1) Compléter les lignes 3, 4 et 5 de ce programme.
2) Saisir et tester cette fonction.

Pour tester cette fonction, vous pouvez utiliser Edupython ou la calculatrice.

5 Exercices

5.1 Module et arguments d'un nombre complexes

***Exercice* 18.**

1) Placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $-4-3i$, $3-2i$, $4+5i$, $-3+4i$.
2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

***Exercice* 19.**
On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2,\ z_B = 1 + i \text{ et } z_C = -1 - 3i.$$

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

***Exercice* 20.**
Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1) $|z-3| = 2$.
2) $|z+2i| = 1$.
3) $|z-i| = |z+2|$.
4) $|z-2+i| = |z|$.

***Exercice* 21.**
On considère les nombres complexes : $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}-i$.
On note A et B les points d'affixes a et b.

1) (a) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe a, puis de b.
   (b) Placer précisément les points A et B dans le plan complexe.
   (c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
2) K est le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Placer le point K.
   (b) Calculer son affixe.
3) On considère le nombre complexe $c = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$.
   On note C le point d'affixe c.
   (a) Montrer que K est le milieu de $[OC]$.
   (b) Placer le point C et montrer que le quadrilatère $OACB$ est un carré.

***Exercice* 22.**
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1) Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   (b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2) (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{2^n}$.
   (b) En déduire pour quelles valeurs de n les points A_n appartiennent-ils à l'axe des abscisses ?

***Exercice* 23.**
On donne les points A et B d'affixes $z_A = 1+i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.

1) (a) Donner une forme trigonométrique de z_A et z_B.
   (b) Placer avec précision ces points sur une figure.
2) F est le point dáffixe $z_F = z_A + z_B$.
   (a) Placer sur la figure le point F.
   (b) Donner la forme algébrique de z_F.
   (c) Démontrer que OAFB est un losange.
3) (a) Justifier que $\widehat{UOF} = \dfrac{5\pi}{12}$ et écrire une forme trigonométrique de z_F.
   (b) Démontrer alors que : $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 24.
A et B sont les points d'affixes respectives : $z_A = 1$ et $z_B = 5.//$ Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.
A tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{2z-10}{z-1}$.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M' lorsque M parcourt Δ.

1) Conjecture avec un logiciel de géométrie par exemple GeoGebra.
2) (a) Placer les points A et B en saisissant par exemple :

```
+   A = 1 + 0 · i
    → = 1 + 0i
```

   (b) Créer la médiatrice Δ du segment $[AB]$ et placer un point M sur Δ.
   (c) Placer le point M' en saisissant :

$$\text{M}' = \frac{2\text{x(M)} + 2 \cdot \text{i} \cdot \text{y(M)} - 10}{\text{x(M)} + \text{i} \cdot \text{y(M)} - 1}$$
$$\rightarrow \; = -0.36 + 1.97\text{i}$$

   (d) Afficher la trace de M' et déplacer le point M afin de conjecturer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.
3) Démonstration
   M d'affixe est un point quelconque de Δ.
   (a) Justifier que $|z-5| = |z-1|$ et en déduire que $|z'| = 2$.
   (b) Que peut-on dire alors du point M' et de l'ensemble $\mathscr{E}$?
   (c) F est un point d'affixe f avec $|f| = 2$ et $f \neq 2$.
   Démontrer qu'il existe un point K d'affixe k, de la droite Δ tel que : $f = \dfrac{2k-10}{k-1}$.
   (d) Déterminer alors l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 25.
A tout nombre complexe z, différent de $-i$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.
On note M le point d'affixe z, et M' le point d'affixe z'
On se propose de déterminer l'ensemble des nombres complexes z' lorsque z est un réel.

1) Donner la forme algébrique de z' dans chacun des cas suivants :
   - $z = 3$
   - $z = -4$
   - $z = i$
   - $z = 1 + i$
2) Sur la figure ci-dessous, nous avons place un point M d'affixe z, sur l'axe des abscisses.
   (a) Placer les points A et B en saisissant par exemple :

```
+   A = 1 + 0 · i
    → = 1 + 0i
```

   (b) Créer la médiatrice Δ du segment $[AB]$ et placer un point M sur Δ.
   (c) Saisissez :

$$\text{M}' = \frac{1 + \text{i} \cdot (\text{x(M)} + \text{i} \cdot \text{y(M)})}{1 - \text{i} \cdot (\text{x(M)} + \text{i} \cdot \text{y(M)})}$$
$$\rightarrow \; = -0.3 + 0.95\text{i}$$

3) (a) Démontrer que si z est un nombre réel, alors z' appartient à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
   (b) La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ? Le démontrer.

Exercice 26.
Déterminer les points M d'affixe non nulle z du plan complexe tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.

Exercice 27.
A, B et C sont les points d'affixes $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = 3+2i$. M désigne un point du plan complexe d'affixe z.

1) Ecrire en fonction de z les normes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$
2) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tel que : $|z-1| = |z-i|$ et $|z-3-2i| \leqslant 2$

Exercice 28.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M' lorsque M parcourt Δ.

1) (a) Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.
   (b) En déduire que les points O, M, M' sont alignés.
2) On nomme A et B les points d'affixes respectivement 1 et -1.
   On désigne par Γ le cercle de centre A contenant le point O. Γ^* désigne le cercle Γ privé du point O.
   On suppose dans cette question que le point M appartient à Γ^*.
   (a) Justifier l'égalité $|z-1| = 1$.
   Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   (b) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.
   (c) On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On suppose dans cette question que le point M appartient à $\mathscr{C}$.
   Démontrer que M' appartient à $\mathscr{C}$ et construire M'.

Exercice 29.
On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par : On considère la suite (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1) (a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   (b) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.
   (c) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.
2) (a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) La suite (r_n) est-elle convergente ?
   (c) Interpréter géométriquement le résultat précédent.
3) On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   (b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

5.2 Synthèses

***Exercice* 30.**
$(0; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexes.
Pour la figure, on pendra pour unité 5 cm. On considère la suite (z_n) définie par
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)z_n - 1 + i, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan complexe qui a pour affixe z_n

1) (a) Déterminer la forme algébrique de z_1 , z_2, z_3 et z_4.
   (b) Placer, dans le plan complexe, les points M_0, M_1 , M_2, M_3 et M_4.
2) Voici une fonction **Suite_1** écrite dans le langage Python.

```
def Suite_1(n) :
    z = 0
    for  i in range(1, n + 1) :
        z = complex(1, 1)/2 * z - 1 + complex(0, 1)
    return z
```

(a) Saisir cette fonction et l'exécuter pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. Quels résultats retrouve-t-on ainsi ?
Conseil : Pour rappel :
complex(x,y) permet d'obtenir en Python le nombre complexe $x + iy$.
Les complexes se notent : $1 + 1j$, $3j$, $-1 + 0j$, ...
(b) Utiliser cette fonction pour obtenir z_5 , z_6, z_7 et z_8.
(c) Placer, dans le plan complexe, les points M_5, M_6 , M_7 et M_8.

(a) Quel est le vecteur dont l'affixe est Z_n ?
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)Z_n$.
Conseil : Ecrire l'expression de Z_{n+1} et mettre $1 + i$ en facteur.
(c) Déterminer Z_0.
(d) Ecrire en langage Python, une fonction **Suite_2** qui, pour une valeur n du paramètre renvoie le nombre complexe Z_n.
(e) Saisir ce programme à l'aide de cette fonction, conjecturer une propriété des nombres Z_{4k} et Z_{4k+2}, pour k nombre entier naturel. **Conseil :** Exécuter ce programme pour des paramètres de la forme $4k$ et $4k + 2$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^{n-1}}$.
En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
(b) Démontrer que pour tout entier naturel k, $(1+i)^{4k}$ est un nombre réel et $(1+i)^{4k+2}$ est un imaginaire pur.
Que peut-on en déduire pour les points M_{4k} et M_{4k+2} ?

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|Z_n| = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
(b) Quelle est la limite de la suite $(|Z_n|)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(c) Interpréter géométriquement ce résultat.

***Exercice* 31.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

1) Résultats préliminaires
   Z désigne u nombre complexe.
   (a) Démontrer que $Re(Z) \leqslant |Z|$.
   (b) Démontrer que $Re(Z) = |Z|$ si, seulement si, Z est un nombre réel positif.
2) Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes
   z et z' désignes deux nombres complexes.
   (a) À partir de l'égalité $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})$, démontrer que :
   $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2Re\left(z + \overline{z'}\right) + |z'|^2$
   (b) À l'aide de l'inégalité de la question 1.a., démontrer que : $|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z|z'| + |z'|^2$
   (c) En déduire alors l'inégalité triangulaire : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
   (d) À l'aide de 1.b., démontrer que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ si, seulement si, $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif.
3) Etude géométrique du cas d'égalité
   On donne la forme algébrique des nombres complexes z et z' :
   <p>$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' nombres réels.
   (a) Exprimer $z\overline{z'}$ en fonction de x, y, x' et y'.
   (b) Montrer que $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif si, et seulement si, </p>

$$(1) \left\{ \begin{array}{lcl} xy' - x'y & = & 0 \\ xx' + yy' & \geqslant & 0 \end{array} \right.$$

   (c) Dans le plan complexe, on note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs d'affixes respectives z et z'.
   Traduire le système **(1)** à l'aide du déterminant du couple $(\vec{u};\vec{v})$ et du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.
   (d) En déduire que $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif si, seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
4) **Une conséquence de l'inégalité triangulaire**
   z et z' désignent deux nombres complexes.
   (a) Démontrer que $|z| \leqslant |z-z'| + |z'|$ et en déduire que $|z| - |z'| \leqslant |z-z'|$
   (b) Démontrer que : $|z'| - |z| \leqslant |z-z'|$
   (c) En déduire un encadrement de $|z| - |z'|$
   (d) Justifier alors l'inégalité $||z| - |z'|| \leqslant |z-z'|$