Chapitre 3 : C1 : Nombres complexes

1 Demander le programme

Contenus

- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
- Conjugaison. Propriétés algébriques.
- Inverse d'un nombre complexe non nul.
- Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
- Résoudre une équation linéaire $az = b$.
- Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$.

Démonstrations

- Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- Formule du binôme.

2 Forme algébrique d'un nombre complexe.

2.1 Définitions générales

UN PEU D'HISTOIRE
Si vous voulez découvrir une brève histoire des nombres en mathématiques avec un survol de l'apparition des nombres complexes, vous pouvez visionner en cliquant directement sur ce lien.

***Définition* 1.**
Un nombre complexe est un élément de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels et i un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

***Exemple* 1.**
$2 + 3i$; $i + 1,5$; 2; $-4i$; $\pi + \sqrt{2}i$ sont des nombres complexes.

***Définition* 2.**
L'écriture $x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, d'un nombre complexe z est appelée la forme algébrique du nombre complexe z.

2.2 Partie imaginaire et partie réelle d'un nombre complexe

***Définition* 3.**
Soit z un complexe de forme algébrique $x + iy$.

Le nombre réel x est appelé la partie réelle de z notée $Re(z)$.
Le nombre réel y est appelé la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Exercice 1.
Déterminer les partie réelle et imaginaire des complexes suivants :

1) $z_1 = 5 + 2i$
2) $z_2 = 2 - 8i$
3) $z_3 = 3$
4) $z_4 = -2i$
5) $z_5 = 2i + 1$

Remarques 1.

1) L'ensemble des nombres réels est inclus dans l'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2) $Re(z)$ et $Im(z)$ sont des nombres réels.

Définition 4.
Un nombre complexe de forme algébrique iy avec $y \in \mathbb{R}$ est appelé imaginaire pur.
L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs peut être noté $i\mathbb{R}$.

Théorème 1.
Soient z et z' deux nombres complexes.
Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.
$z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

Démonstration.
Idées de la démonstration : travailler par double implication et utiliser un raisonnement par l'absurde pour le sens réciproque. On note $x + iy$ et $x' + iy'$ les formes algébriques des nombres complexes z et z' respectivement.
$\Leftarrow$: Si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$ alors $x = x'$ et $y = y'$ ainsi $z = x + iy = x' + iy' = z'$.
$\Rightarrow$: à vous de jouer. $\square$

Exercice 2.
Le but de cet exercice est de montrer le sens réciproque du théorème précédent : si $z = z'$ alors $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.
On note $x + iy$ et $x' + iy'$ les formes algébriques des nombres complexes z et z' respectivement.
On suppose que $x + iy = x' + iy'$.

1) Démontrer grâce à un raisonnement par l'absurde que $y = y'$.(on cherchera à exprimer i en fonction de x, x', y et y'.)
2) En déduire que l'on a aussi $x = x'$.

Remarques 2.
Ce théorème implique que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

Proposition 1.

1) *z est un réel si et seulement si $Im(z) = 0$.*
2) *z est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$.*
3) *$z = 0$ si et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.*

Démonstration.
Ces 3 propriétés découlent directement du théorème précédent garantisant l'unicité de la forme algébrique
Prenons par exemple la 2. :
Idées de la démonstration : travailler par double implication
On note $x + iy$ la forme algébrique du nombre complexe z.
$\Leftarrow$: Si $Re(z) = 0$ alors $z = iy$: par définition, z est un imaginaire pur.
$\Rightarrow$: Si z est nombre imaginaire pur alors il peut s'écrire sous la forme $z = iy'$
D'après l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on a : $x = 0$ et $y = y'$ donc $Re(z) = 0$. $\square$

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels x et y vérifiant l'égalité :

1) $(2-x)+i(2y-3)=4+6i$.
2) $(x+y)+i(2x-y-4)=0$.

3 Opérations sur les nombres complexes

3.1 Addition et multiplication sur les nombres complexes

Théorème 2. *(Admis)*
$\mathbb{C}$ peut être muni ainsi d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et pour lesquelles les règles de calcul restent les mêmes.

Proposition 2.
Soient deux nombres complexes z et z' de formes algébriques $x+iy$ et $x'+iy'$.

- Somme : $z+z'=(x+x')+i(y+y')$
- Produit : $zz'=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

Exercice 4.
Comme la multiplication suit les mêmes règles que celles dans $\mathbb{R}$, développer l'expression suivante :
$(x+iy)\times(x'+iy')$.

Exercice 5.
Effectuer les calculs suivants :
$2+3i-(3-5i)$
$(1+i)(2-\frac{1}{2}i)$

3.2 Nombre conjugué

Définition 5.
Nombre conjugué
On appelle nombre conjugué du nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ de forme algébrique $x-iy$.

Exercice 6.
Donnez les conjugué des complexes suivants :

1) $z_1=-5-i$.
2) $z_2=2-3i$.

Proposition 3.
$z+\overline{z}=2Re(z)$ *et* $z-\overline{z}=2iIm(z)$.

Démonstration.
Soit z un nombre complexe.
$z+\overline{z}=Re(z)+iIm(z)+Re(z)-iIm(z)=2Re(z)$
$z-\overline{z}=Re(z)+iIm(z)-Re(z)+iIm(z)=2iIm(z)$. □

Proposition 4.
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel n.

1) *z est réel si et seulement si $\overline{z}=z$.*
2) *z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z}=-z$.*
3) $\overline{\overline{z}}=z$
4) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
5) $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
6) $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

Démonstration.
Toutes ces propriétés se démontrent à l'aide de la forme algébrique.

1) Idée de la démonstration pour ce point : par double implication.
(sens direct) On suppose que z est un réel :
$z = Re(z)$. Alors $Im(z) = 0$ et donc $\overline{z} = Re(z) + i \times 0 = Re(z) = z$.
(sens réciproque) On suppose que $z = \overline{z}$ donc $Re(z)+iIm(z) = Re(z)-iIm(z)$ et par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on en déduit donc $Re(z) = Re(z)$ et $Im(z) = -Im(z)$. D'où $Im(z) = 0$: z est un réel.
2) De la même manière que ci-dessus.
3) De la même manière que ci-dessus.
4) $\overline{z+z'} = Re(z+z') - iIm(z+z') = Re(z) + Re(z') - iIm(z) - iIm(z') = (Re(z) - iIm(z)) + (Re(z') - iIm(z')) = \overline{z} + \overline{z'}$
5) démonstration à savoir faire ! cf. l'exercice ci-dessous
6) démonstration à savoir faire ! cf. l'exercice ci-dessous.

$\square$

***Exercice* 7.**
Soient z et z' deux nombres complexes de forme algébrique respective $x + iy$ et $x' + iy'$.
Montrer que $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

***Exercice* 8.**
Soient z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

***Exercice* 9.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $\overline{2z + 5 + 2i} = \overline{3 \times (z+1)} + 1 + i$.
2) $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$.

***Proposition* 5.**
Voici la propriété essentielle sur le conjugué :
Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $x + iy$.
$z \times \overline{z} = x^2 + y^2$.

***Exercice* 10.**
Développer $(x + iy) \times \overline{x + iy}$ pour le prouver.

3.3 Inverse et division sur les nombres complexes

***Définition* 6.**
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$.
Si $z \neq 0$ alors : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, c'est-à-dire :
Si $z \neq 0$ alors : $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\times(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$.

***Exercice* 11.**
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{1}{-1+3i}$.

***Définition* 7.**
Quotient
Soit z et z' deux complexes de forme algébrique $x + iy$ et $x' + iy'$.
Si $z' \neq 0$ alors : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

***Proposition* 6.**
Soit z et z' deux complexes de forme algébrique $x + iy$ et $x' + iy'$.
Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $x + iy$.
Pour calculer une division $\frac{z}{z'}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$ le conjugué de z'.
Ainsi, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{x+iy}{x'+iy'} = \dfrac{(x+iy)\times(x'-iy')}{(x'+iy')\times(x'-iy')} = \dfrac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + i \times \dfrac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}$.

Exercice 12.
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{3+2i}{1-i}$.

Proposition 7.
$zz'=0$ si et seulement si $z=0$ ou $z'=0$.

Exercice 13.
Résoudre l'équation suivante :
$(z-2)(2z-1+i)=0$.

Exercice 14.
Résoudre l'équation $2z-3i=(z-5)(1+i)$.

Proposition 8.
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel n.
Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\frac{1}{z'}} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration.
Soit z un complexe non nul.
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \overline{z} =_{(4)} \overline{\frac{1}{z} \times z} = \overline{1} = 1$.
Ainsi $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \overline{z} = 1$ et $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
En outre, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} \overline{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} =_{\text{d'après ci-dessus}} \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. □

4 Formule du binôme

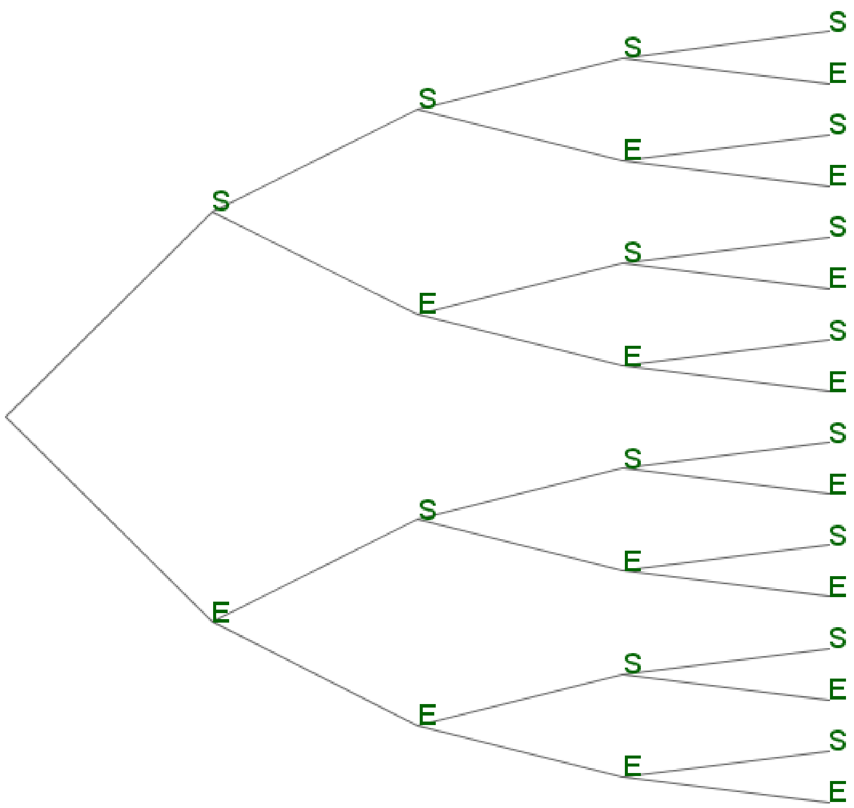
4.1 Coefficients binomiaux

On considère une répétition de n expériences identiques où pour chacune, il n'y a que deux possibilités :

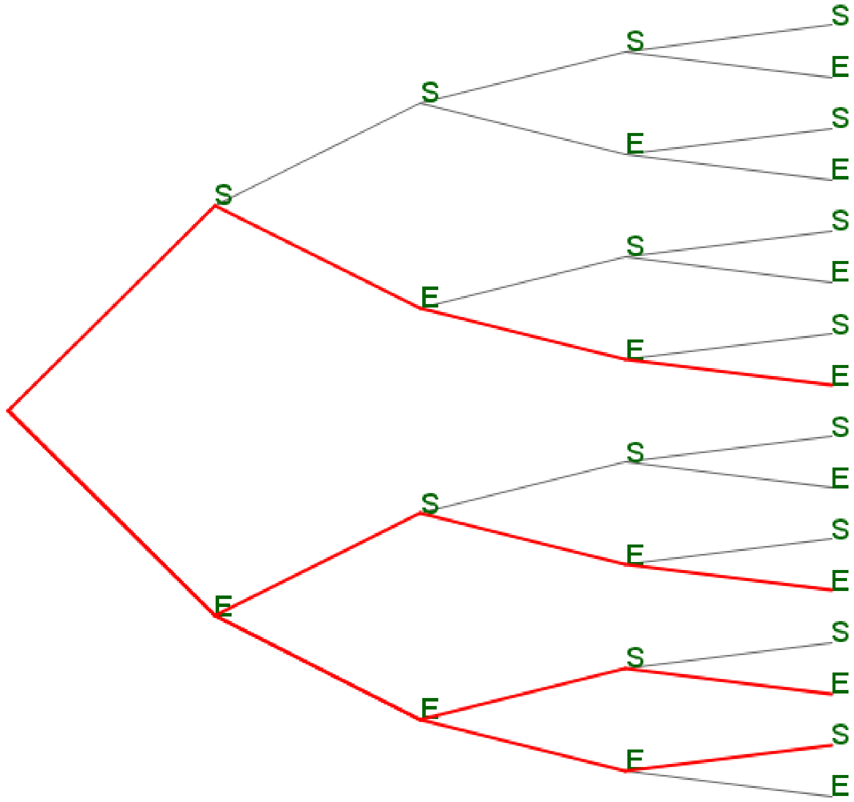
- soit un succès (noté S)
- soit un échec (noté E ou $\overline{S}$)

Définition 8.
Une telle répétition est appelée un schéma de Bernoulli.

On peut représenter cette répétition par un arbre comme ci-dessous où $n=4$ répétitions sont considérées :



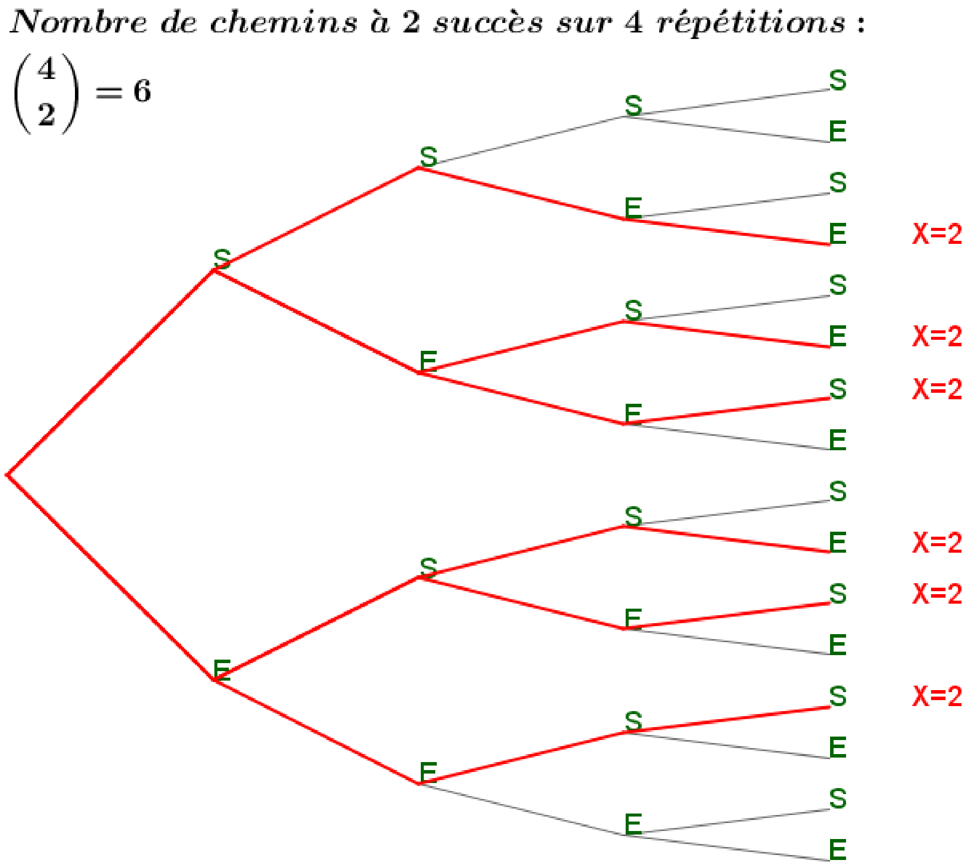
On s'intéresse maintenant aux chemins qui permettent d'avoir un nombre fixe k de succès.
Par exemple, dans l'arbre précédent, si l'on veut obtenir les chemins où l'on ne rencontre que $k = 1$ succès sur les $n = 4$ répétitions, on obtient l'image suivante :



Définition 9.
Soit un schéma de Bernoulli avec n répétitions identiques.
Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès.
$\binom{n}{k}$ peut être lu "k parmi n".

Remarques 3.
Par convention $\binom{0}{0} = 1$

Exemple 2.
$\binom{4}{2} = 6$: il y a 6 chemins possibles qui conduisent à $k = 2$ succès sur $n = 4$ répétitions :



***Exercice* 15.**

1) $\binom{4}{2} = 6$: il y a 6 chemins possibles qui conduisent à $k = 2$ succès sur $n = 4$ répétitions :
2) En déduire les valeurs de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

Vous travaillerez en spécilité maths sur ces coefficients, en particulier, vous démontrerez les propriétés suivantes :

***Proposition* 9.**
Pour tout entier k et n tels que : $0 \leqslant k \leqslant n$ *:*

1) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$
2) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$
3) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}.$
4) $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$

Ces propriétés et les premières valeurs des coefficients binomiaux peuvent être mémorisées grâce au triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

cas particulier de :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice 16.
Compléter le tableau précédent présentant le triangle de Pascal en rajoutant la ligne correspondant à $n = 7$.

Proposition 10.
Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.
Les coefficients binomiaux peuvent être obtenus par la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}, \text{ où } n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 \text{avec la convention } 0! = 1$$

4.2 La formule du binôme de Newton

Exercice 17.
a et b désigne deux nombres complexes quelconques.

1) Développer l'expression $(a+b)^2$.
2) Développer l'expression $(a+b)^3$.
3) Développer l'expression $(a+b)^4$.
4) Que remarquez-vous quant aux coefficents apparaissant dans le développement de $(a+b)^n$ dans les cas précédant ?
5) Quel développement pouvez-vous conjecturer quant à l'expression $(a+b)^5$?

Proposition 11.
La formule du binôme de Newton :
Quels que soient les nombres complexes a et b et l'entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ce qui peut s'écrire de manière moins condensée en :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

.

Voici une démonstration de cette formule du binôme de Newton. Commencer par lire cette démonstration ci-dessous avant de répondre aux questions qui suivent :

***Exercice* 18.**

Démonstration.
On note $P(n)$ la propriété $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, où n est un entier naturel.

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a :
D'une part : $(a+b)^0 = 1$;
d'autre part : $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} \times a^0 \times b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1.$
Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Considérons un entier m tel que $P(m)$ soit vraie, c'est-à-dire que $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$.
Montrons que $P(m+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$

Ligne 1 : $(a+b)^{m+1} = (a+b) \times (a+b)^m$

Ligne 2 : $(a+b)^{m+1} = (a+b) \times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$

Ligne 3 : $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}$

Ligne 4 : $(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1}$

Ligne 5 : $(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0} a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{p=1}^{m} \binom{m}{p-1} a^{m-p+1} b^p + \binom{m}{m} b^{m+1}$

Ligne 6 : $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{p=1}^{m} \binom{m}{p-1} a^{m+1-p} b^p + a^{m+1} + b^{m+1}$

Ligne 7 : $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) a^{m+1-k} b^k + a^{m+1} + b^{m+1}$

Ligne 8 : $(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k + b^{m+1}$

Ligne 9 : $(a+b)^{m+1} = \binom{m+1}{0} a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k + \binom{m+1}{m+1} b^{m+1}$

Ligne 10 : $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$

On est donc abouti à $P(m+1)$.

Conclusion :
La propriété étant initialisée pour $n = 0$ et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n. $\square$

Quelle idée essentielle sert à cette démonstration et est donc à retenir ?

1) Comment peut-on justifier le passage de la Ligne 1 à la Ligne 2 ?
2) Quelle technique de calcul justifie le passage de la Ligne 2 à la Ligne 3 ?
3) Comment peut-on justifier le passage de la Ligne 3 à la Ligne 4 ?
4) Quel changement de variable permet de justifier le passage de laLigne 4 à la Ligne 5 ?
5) Quels calculs permettent de justifier le passage de la Ligne 5 à la Ligne 6 ?
6) Expliquer le regroupement des deux termes permettant le passage de la Ligne 6 à la Ligne 7.
7) Comment peut-on justifier le passage de la Ligne 7 à la Ligne 8 ?
8) Quels calculs permettent de justifier le passage de la Ligne 8 à la Ligne 9 ?
9) Comment peut-on justifier le passage de la Ligne 9 à la Ligne 10 ?

Un peu d'histoire

Cette formule du binôme était déjà connue de mathématiciens indiens, arabes et persans dès le X^e siècle de notre ère. Elle a été démontré au $XIII^e$ siècle par le mathématicien chinois Yang Hui indépendamment de ces travaux précédents. En 1665, Issac Newton généralisa cette formule a des exposants non entiers.

***Exercice* 19.**
Utiliser la formule du binôme de Newton afin de développer puis simplifier les expressions suivantes :
1) $z_1 = (3+i)^4$.
2) $z_2 = (2i-1)^3$.

***Exercice* 20.**
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
1) z est un nombre complexe quelconque. Développer $(1+z)^n$.
2) Choisir une valeur adaptée de z afin d'en déduire en fonction de n expression de la somme :

$$S = \binom{n}{0} + 4\binom{n}{1} + 4^2\binom{n}{2} + ... + 4^n\binom{n}{n}$$

5 Exercices

5.1 Calculer avec la forme algébrique

***Exercice* 21.**
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On donne les nombres complexes :

$$z_1 = -1+2i \text{ et } z_2 = 3+4i.$$

Déterminez la forme algébrique de : $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$; $2z_1 - 3z_2$; $z_1 \times z_2$.

***Exercice* 22.**
Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
1) $(1+i)^2$.
2) $(1-i)^2$.
3) $(3-i)^2$.

***Exercice* 23.**
On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
1) Donnez la forme algébrique de j^2.
2) Déterminer le discriminent du polynôme : $X^2 + X + 1$.
3) Vérifiez que $1 + j + j^2 = 0$.

***Exercice* 24.**
Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$(2+i)^2(1-3i) \text{ et } (5-2i)(1+4i)(2-i).$$

***Exercice* 25.**
x et y sont deux nombres réels. Quelle est la forme algébrique de $(x+1+iy)(x-1-iy)$.

5.2 Manipuler partie réelle et partie imaginaire

***Exercice* 26.**
On donne les nombres complexes :

$$z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = 4 + 2i,\ z_3 = 5 - 2i.$$

Calculez :

1) $Re(z_1 + z_2 + z_3)$.
2) $Im(iz_1)$.
3) $Im(z_1 z_2)$.
4) $Re(2z_1 - 3z_2 + z_3)$.

***Exercice* 27.**
z est un nombre complexe. Dans chacun des cas suivants, précisez si Z est réel ou imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

1) $Z = z + \bar{z} - 3i$.
2) $Z = z - \bar{z} + 5i$.
3) $Z = z\bar{z} - z + \bar{z}$.
4) $Z = \bar{z}(z + i) + i(5i - z)$.

***Exercice* 28.**
Dans chacun des cas suivants, exprimez $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$.

1) $Z = -2 + iz$.
2) $Z = (i + z)(2 - iz)$.
3) $Z = (2iz + 3)^2$.
4) $Z = \frac{1+iz}{2z-i}$.

5.3 Déterminer la forme algébrique

***Exercice* 29.**
Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

1) $i(1 - i)$.
2) $(2 - 3i)(4 + i)$.
3) $\frac{3+2i}{4-i}$.
4) $\frac{1}{2+3i}$.
5) $\frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}$.
6) $\frac{2+3i}{5-2i}$.
7) $(1 + i)(4 - 3i)(1 - i)$.
8) $(3 + i)^2(3 - 2i)$.
9) $\frac{2-5i}{3+2i}$.
10) $\frac{1}{i\sqrt{2}-3}$.
11) $2i - \frac{3}{2-i}$.

***Exercice* 30.**
On note $z = x + iy$, x et y réels.On pose :

$$Z = \frac{z - 1}{z + 1}, z \neq -1$$

Quelle est la forme algébrique de Z ?

***Exercice* 31.**
Résolvez chacune des équations suivantes :

1) $(3-2i)z = i-2$.
2) $(2+i)\overline{z} = 3i$.

***Exercice* 32.**
On note $z_1 = \frac{2i+1}{i+2}$ et $z_2 = \frac{1-2i}{2-i}$.

1) Pourquoi peut on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ imaginaire pur ?
2) Retrouvez ces résultats par le calcul.

***Exercice* 33.**
Proposer une fonction écrite en langage Python qui :

- prend quatre paramètres : les parties réelle et imaginaire de deux nombres complexes z_1 et z_2.
- retourne la partie réelle et imaginaire du quotient $\frac{z_1}{z_2}$ quand il existe et la chaîne de caractères "le quotient n'existe pas" sinon.

5.4 Résolution d'équations

***Exercice* 34.**
Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donnez les résultats sous forme algébrique.

1) $3iz - 2 + 4i = (1-2i)z + 6$.
2) $(3+2i)z = 2i\overline{z} - 5i$.
3) $\frac{z+1}{z-1} = i$.
4) $(2iz+i)(4z-8-4i) = 0$.
5) $4\overline{z} + 2i - 4 = 0$.

***Exercice* 35.**
Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donnez les résultats sous forme algébrique.

1) $iz - 2\overline{z} = \overline{i}$.
2) $\left(\overline{z-4i}+2\right)(z+2i) = 0$.
3) $\dfrac{z+i}{\overline{z-2}-2i} = \dfrac{2-i}{3}$.

5.5 Binôme de Newton

***Exercice* 36.**
Développer les expressions suivantes à l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal :

1) $(3z+2i)^5$.
2) $\left(\frac{1}{2}z+2\right)^4$.

***Exercice* 37.**
Quel est le coefficient de z^4 dans le développement de $(2z+1)^8$?

***Exercice* 38.**
Développer les expressions suivantes à l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal :

$$A = \sum_{k=0}^{50} \binom{100}{2 \times k} = \binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \binom{100}{4} + ... + \binom{100}{98} + \binom{100}{100}$$

$$B = \sum_{k=0}^{49} \binom{100}{2 \times k + 1} = \binom{100}{1} + \binom{100}{3} + \binom{100}{5} + ... + \binom{100}{97} + \binom{100}{99}$$

1) Calculer la somme $A + B$, sans chercher à connaître ni A, ni B.
2) De même, calculer la différence $A - B$.
3) En déduire les valeurs de A et de B.

5.6 Utilisation de Python

***Exercice* 39.**
Pour tester des codes en langage Python, vous pouvez utiliser Edupython.
Découverte de quelques instructions natives en Python.

1) Tester les instructions suivantes dans la partie console et comprendre le rôle de chacune :
   (a)
   ```
   >>> z1 = complex(4,7)
   >>> z1
   >>> z1.real()
   >>> z1.imag()
   ```
   (b)
   ```
   >>> z2 = complex(1,-3)
   >>> z2
   >>> z1+z2
   >>> z1/z2
   >>> z**2
   ```
2) Quelles remarques peut-on faire sur l'affichage sous Python d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique ?