A3 : PGCD

1. PGCD de deux entiers

Définition 1

Étant donnés deux entiers relatifs a et b dont au moins un est non nul, l'ensemble des diviseurs communs à a et à b admet un plus grand élément, que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b et que l'on note $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

Exercice 1

1. Déterminer la liste des diviseurs de 175 et de 315.
2. En déduire $\mathrm{PGCD}(175, 315)$, le plus grand commun diviseur des deux nombres 175 et 315.

Propriétés 1

Soient deux entiers relatifs a et b, avec $a \neq 0$, on a :

- a étant positif, $\mathrm{PGCD}(a, 0) = a$; $\mathrm{PGCD}(a, 1) = 1$.
- $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|)$.
- Si b divise a, $\mathrm{PGCD}(a, b) = |b|$.
- Si b est premier et ne divise pas a, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

Exercice 2

Démontrer le dernier point de la propriété précédente.

2. Algorithme d'Euclide

Propriétés 2

Soient a et b deux entiers naturels non nuls avec $b < a$. On appelle r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors : $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r)$

Exercice 3

Démonstration de $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$

1. Montrer que $\{ d \in \mathbb{N}, d|a \text{ et } d|b \} = \{ d \in \mathbb{N}, d|b \text{ et } d|r \}$. Autrement dit l'ensemble des diviseurs de a et de b est aussi l'ensemble les diviseurs de b et de r.
2. Conclure quant aux PGCD.

Algorithme d'Euclide

Cet algorithme est une procédure pour déterminer le PGCD de deux entiers.

Exemple

1. $315 = 175 \times 1 + 140$
2. $175 = 140 \times 1 + 35$
3. $140 = 35 \times 4 + 0$

On obtient donc en appliquant la propriété précédente successivement :

1. $\mathrm{PGCD}(315, 175) = \mathrm{PGCD}(175, 140)$ d'après la ligne 1.
2. $\mathrm{PGCD}(175, 140) = \mathrm{PGCD}(140, 35)$ d'après la ligne 2.
3. $\mathrm{PGCD}(140, 35) = \mathrm{PGCD}(35, 0)$ d'après la ligne 3.

Comme $\mathrm{PGCD}(35, 0) = 35$, on en déduit que $\mathrm{PGCD}(315, 175) = 35$.

Description de l'algorithme :

Lorsque b ne divise pas a, l'algorithme d'Euclide consiste à :

- Effectuer la division euclidienne de a par b.
- Répéter les divisions euclidiennes du diviseur et du reste de la division euclidienne précédente.
- S'arrêter lorsque l'on obtient un reste nul.

Le PGCD des deux nombres entiers naturels b et a est égal au dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Remarque historique :

Cet algorithme est appelé algorithme d'Euclide car le mathématicien Euclide a décrit dans le livre VII de ses *Éléments* vers 300 avant notre ère un algorithme similaire.

La méthode décrite par Euclide propose de répéter le fait d'enlever au plus grand nombre le plus petit, ceci autant que possible, puis d'enlever le reste au plus petit des nombres. On s'arrête lorsque l'on obtient un nombre qui divise le précédent.

Avec des notations actuelles, cette méthode utilise l'égalité : $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a - b, b)$.

Cet algorithme a été trouvé indépendamment par des mathématiciens chinois et indiens. Une utilité de cette méthode était de résoudre des problèmes d'astronomie, en particulier pour obtenir des calendriers plus précis.

Exercice 4

Appliquer l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 7260 et de 1107.

Exercice 5 : Implémentation en Python

Écrire une fonction `euclide` en Python qui prend comme arguments deux entiers a et b et qui renvoie le PGCD de a et de b.

Propriétés 3 : Homogénéité

Soient trois entiers naturels a, b et k. Alors : $\mathrm{PGCD}(ka, kb) = k \times \mathrm{PGCD}(a, b)$

Exercice 6 :Démonstration de l'homogénéité du PGCD On suppose, quitte à permuter a et b que $a < b$. Notons r le reste de la division euclidienne de a par b.

1. Cas où b divise a. Montrer que $PGCD(ka, kb) = k \times PGCD(a, b)$.

2. Cas où b ne divise pas a.

   a. Écrire les divisions euclidiennes de a par b et de ka par kb.

   b. En déduire que kr est le reste de la division euclidienne de ka par kb.

   c. Utiliser l'algorithme d'Euclide et la suite des restes des divisions euclidiennes, pour démontrer que $PGCD(ka, kb) = k \times PGCD(a, b)$.

Propriétés 4 :

Soient a et b deux entiers non simultanément nuls.

d est un diviseur commun à a et à b si, et seulement si, d divise $PGCD(a, b)$.

Exercice 7 : démonstration de la propriété 4

Quitte à multiplier par -1, on peut supposer que les deux nombres a et b sont positifs.

1. Soit d un diviseur de a et de b.

a. Cas où b divise a.

Montrer qu'alors d divise $PGCD(a, b)$

b. Cas où b ne divise pas a.

Écrire la succession des égalités liées à l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de a et de b.

c. Justifier que d divise chacun des restes successifs obtenus dans la mise en oeuvre de l'algorithme d'Euclide.

d. Qu'en déduire ?

2. Soit d un diviseur de $PGCD(a, b)$.

   Justifier que d divise a et b.

3. Qu'avez-vous ainsi montré ?

Nombres premiers entre eux

Définition 2 :

Soient deux entiers relatifs a et b non nuls.

Lorsque $PGCD(a, b) = 1$, on dit que les entiers a et b sont premiers entre eux.

Remarque :

Cette définition revient à dire que les seuls diviseurs entiers communs aux entiers a et b sont 1 et -1.

Propriété 5 :

Soient a et b deux entiers naturels.
$D = PGCD(a, b)$ si, et seulement si $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 8 :

Démonstration de $D = PGCD(a, b)$ si, et seulement si $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont des entiers premiers entre eux.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Idée : travailler par double implication pour démontrer l'équivalence.

*

1. On note $D = PGCD(a, b)$.

a. Justifier que $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont des entiers naturels non nuls.

b. On note $d = PGCD(\frac{a}{D}, \frac{b}{D})$. En utilisant la propriété d'homogénéité montrer que $d = 1$.

c. Qu'a-t-on déjà réussi à démontrer ?

2. Réciproquement on suppose que $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont premiers entre eux.

   Montrer que $PGCD(a, b) = D$.

**Propriétés 6 : **

Soient a, b et c trois nombres entiers non nuls.

Ces trois nombres ont le même Plus Grand Commun Diviseur :
$PGCD(PGCD(a, b), c) = PGCD(a, PGCD(b, c))$, ce nombre peut être noté $PGCD(a, b, c)$.

Démonstration

Comme $PGCD(PGCD(a, b), c) > 0$ et $PGCD(a, PGCD(b, c)) > 0$, il suffit de montrer que $PGCD(PGCD(a, b), c)|PGCD(a, PGCD(b, c))$ et $PGCD(a, PGCD(b, c))|PGCD(PGCD(a, b), c)$, pour montrer que $PGCD(PGCD(a, b), c) = PGCD(a, PGCD(b, c))$, d'après le deuxième propriété de ce cours A1.

Premier sens de la divisibilité

Montrons d'abord que $PGCD(PGCD(a, b), c)|PGCD(a, PGCD(b, c))$.

Soit d le $PGCD$ des nombres $PGCD(a, b)$ et c.

Comme d divise $PGCD(a, b)$, d divise a et b, d'après la propriété 5.

Dès lors, d divise b et c donc aussi $PGCD(b, c)$ (même propriété).

Ainsi, d divise a et $PGCD(b, c)$ donc leur PGCD : $PGCD(a, PGCD(b, c))$(même propriété).

Second sens de la divisibilité

Montrons désormais que $PGCD(a, PGCD(b, c))|PGCD(PGCD(a, b), c)$.

Il suffit de permuter les rôles de a et de c qui jouent un rôle symétrique.

Soit d le $PGCD$ des nombres $PGCD(b, c)$ et a.

Comme d divise $PGCD(b, c)$, d divise c et b, d'après la propriété 5.

Dès lors, d divise b et a donc aussi $PGCD(a, c)$ (même propriété).

Ainsi, d divise c et $PGCD(a, b)$ donc leur PGCD : $PGCD(PGCD(a, b), c)$(même propriété).

Comme $PGCD(PGCD(a, b), c)|PGCD(a, PGCD(b, c))$ et $PGCD(a, PGCD(b, c))|PGCD(PGCD(a, b), c)$, $PGCD(a, PGCD(b, c)) = PGCD(PGCD(a, b), c)$.

Exercices

Exercice 9

Calculer le PGCD des nombres suivants :

1. $a = 826$ et $b = 644$.
2. $a = 1210$ et $b = 308$.
3. $a = 3256$ et $b = -2354$.

Exercice 10

À l'aide du PGCD donner la version irréductible de ces fractions :

1. $\frac{1864}{1631}$
2. $\frac{3103650}{3420}$

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n inférieurs à 100 tels que $PGCD(n, 324) = 12$.

Vous pouvez étudier la liste des diviseurs de 324 si vous restez bloqué

Exercice 12

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n inférieurs à 100 tels que $PGCD(n, 150) = 6$.

Exercice 13

Soient $a = n$ et $b = n + 1$, où n est un entier naturel.

1. Montrer que si d divise a et b alors $|d| = 1$.
2. En déduire que a et b sont premier entre eux.

Exercice 14

Même énoncé avec $a=n+1$ et $b=2n+1$

Exercice 15 Soit n un entier naturel non nul. En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

1. $a=3n+2$ et $b=n+1$.
2. $a=5n+7$ et $b=2n+3$.
3. $a=3n^2+5n+1$ et $b=3n+1$.

Exercice 16

Calculer les valeurs entières positives de a et b possibles sachant que $a+b=360$ et $PGCD(a,b)=18$.

Exercice 17

```
        Calculer les valeurs entières positives de $a$ et $b$ possibles sachant
que $a-b=105$ et $PGCD(a,b)=15$ et que
           $a$ et $b$ sont inférieurs strictement à 300.
```

Exercice 18

Calculer les valeurs entières positives de a et b possibles sachant que $ab=5202$ et $PGCD(a,b)=17$.

Exercice 19

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et n un entier naturel non nul.

1. On suppose que a peut s'écrire sous la forme $a=k\times n+b$, où k est un entier relatif.

Montrer que le $PGCD(a,n)=PGCD(b,n)$ 2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 20

On considère la fonction Python suivante dont les arguments sont a et b deux entiers naturels.

```python
def mystere(a,b):
    n = 1
    while n <= a and n <= b:
        if a % n == 0 and b % n == 0:
            p = n
        n = n+1
    return p
```

1. Que renvoie l'instruction *mystere(142,76)*
2. Quel est le rôle de cette fonction ?

Exercice 21

Partie A : conjecture grâce à un programme en langage Python :

1. Créer une fonction `PGCD` qui renvoie le PGCD de deux nombres entiers donnés comme arguments.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers A et B définis par $A = n^2 + 4n + 5$ et $B = n + 2$.

Créer un fonction *liste_PGCD* qui prend en argument un entier p et qui renvoie la liste des $PGCD(A, B)$ lorsque n décrit toute la liste des entiers naturels entre 2 et p.

3. Conjecturer le PGCD de A et de B suivant les valeurs de n.

Partie B : preuve de la conjecture :

1. Effectuer la division euclidienne de A par B.
2. En déduire que $PGCD(A, B) = PGCD(n + 2, 1)$.
3. En déduire le $PGCD$ de A et de B suivant les valeurs de n pour prouver ou corriger la conjecture émise à la partie A.

Exercice 22

Un pianiste produit un son complexe est composé en appuyant sur trois touches à la fois d'un piano quelque peu désaccordé :

- touche n°85 du La_6 de fréquence 3520 Hz,
- touche n°82 du $Fa_6\#$ de fréquence 2960 Hz,
- touche n°71 du Sol_5 de fréquence 1568 Hz.

On admet que le son complexe produit par ces trois touches admet une fréquence égale au PGCD des trois fréquences.

Quelle est la fréquence de ce son complexe ?

Exercice 23

Une boîte parallélépipédique rectangle est de dimensions intérieures 31.2 cm, 13 cm et 7.8 cm.

Elle est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres.

Quel nombre minimal de cubes peut contenir cette boîte ?

Exercice 24

Partie A : conjecture grâce à un programme en langage Python :

1. Créer une fonction *PGCD* qui renvoie le PGCD de deux nombres entiers donnés comme arguments.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers A et B définis par $A = 2n^3 + 7n^2 - 21n + 15$ et $B = n^2 + 4n - 9$.

Créer un fonction `liste_PGCD` qui prend en argument un entier p et qui renvoie la liste des $PGCD(A, B)$ lorsque n décrit toute la liste des entiers natrurels entre 2 et p.

3. Conjecturer le PGCD de A et de B suivant les valeurs de n.

Partie B : preuve de la conjecture :

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2 : 4n^2 + 4n - 9 > n + 6$.
2. Effectuer la division euclidienne de A par B.
3. Démontrer que $PGCD(A, B) = PGCD(n + 6, 3)$.
4. En déduire le $PGCD$ de A et de B suivant les valeurs de n pourprouver ou corriger la conjecture émise à la partie A.