A2 : division euclidienne

1 Division euclidienne

A. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Théorème 1. *Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.*
Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple d'entiers naturels $(q; r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Vocabulaire
a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

Remarques 1. b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Démonstration. Existence du couple $(q; r)$
Soit q la partie entière du quotient $\dfrac{a}{b}$. L'entier q est défini par l'encadrement ...... $\leqslant \dfrac{a}{b} <$ ....
Puisque $b > 0$, on en déduit que .... $\leqslant a <$ ....*
On pose alors $r = a - bq$. Ainsi $a =$ .... et d'après *, ... $\leqslant a - bq <$ ....
soit ....
Unicité du couple $(q; r)$
On suppose qu'il existe deux couples d'entiers naturels $(q; r)$ et $(q'; r')$ vérifiant simultanément :
$a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$.
On en déduit que $r - r' =$ .... $=$ .... donc $r - r'$ est multiple de ......
Or, $0 \leqslant r < b$ et ...... $< -r' \leqslant$ ...... donc, par addition membre à membre, on obtient ...... $< r - r' <$ ......
Le seul multiple de b dans $]-b; b[$ est ...... donc $r - r' =$ ...... soit ....
Comme $r - r' = b(q' - q)$ avec $b \neq 0$, alors .... $= 0$ soit ...., d'où l'unicité.
□

B. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème 2. *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.*
Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, alors il existe un unique couple d'entiers $(q; r)$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$.
Vocabulaire
a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

Définition 1. *Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer le couple d'entiers $(q; r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$.*

Exercice 1. Effectuez les divisions euclidiennes de a par b pour chacun des cas suivants :

1) $a = 1776$ par $b = 7$
2) $a = 1776$ par $b = -7$
3) $a = -1776$ par $b = 7$
4) $a = -1776$ par $b = -7$

2 Congruence dans $\mathbb{Z}$

Définition 2. *a est congru à b modulo n*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que a et b sont congrus modulo n lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
Notation :
On écrit $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b\ [n]$ ou encore $a \equiv b \pmod{n}$. On lit "a est congru à b modulo n".

***Théorème* 3.** *Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :* $a \equiv b\ [n]$ *si, et seulement si, n divise $a - b$.*

***Exercice* 2.** Démontrer le théorème précédent.

***Exemple* 1.** $168 - 138 = 30 = 2 \times 15$ donc $168 \equiv 138\ [15]$.

***Corollaire* 1.** *$a \equiv b\ [n]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + nk$*

***Exercice* 3.** Vrai ou Faux :

1) $24 \equiv 1\ [5]$
2) $1 \equiv -1\ [2]$
3) $10 \equiv 0\ [5]$
4) $9 \equiv 2\ [2]$

***Proposition* 1.** *$a \equiv r\ [n]$ avec $0 \leqslant r < n$ si, et seulement si, a a pour reste r dans la division euclidienne de a par n.*

***Exercice* 4.** Démontrer la propriété précédente.

***Proposition* 2.** *b divise a si, et seulement si, le reste de la division de a par b est nul c'est-à-dire que $a \equiv 0\ [b]$.*

***Théorème* 4.** *Transitivité*
Soit n un entier naturel non nul. Pour tous entiers relatifs a, b et c, si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$.

***Exercice* 5.** Démontrer le théorème précédent.

***Théorème* 5.** *Congruences et opérations*
Soit n un entier naturel non nul et a, a', b et b' des entiers relatifs.
Si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'\ [n]$ alors

— $a + a' \equiv b + b'\ [n]$
— $a - a' \equiv b - b'\ [n]$
— $aa' \equiv bb'\ [n]$

***Proposition* 3.** *Si $a \equiv b\ [n]$ alors :*
— *pour tout entier relatif k, $ka \equiv kb\ [n]$*
— *pour tout entier naturel p, $a^p \equiv b^p\ [n]$*

***Exercice* 6.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^{3n} \equiv 1\ [7]$.

***Exercice* 7.** Soit n un entier naturel et $A = n(n^2+5)$. Le but est de démontrer que A est divisible par 3.</p>

1) Quels sont les restes possibles dans une division par 3 ?
2) Reproduire et compléter le tableau suivant de congruence modulo 3 en précisant dans chaque cellule le reste de la division euclidienne par 3.

Reste de la division de n par 3	0	1	2
Reste de la division de n^2 par 3			
Reste de la division de n^2+5 par 3			

3) En déduire que $A = n(n^2+5)$ est divisible par 3 quel que soit l'entier n.

***Exercice* 8.** Déterminer l'ensemble des valeurs entières n pour lesquelles $A = n^2 - 3n + 10$ est divisible par 4.

3 Exercices

A. Division euclidienne

***Exercice* 9.** Vrai ou Faux- Justifier

1) Si le reste de la division euclidienne de a par 70 est égal à 0, alors a est un diviseur de 70.
2) Tout nombre impair est premier.
3) Tout entier relatif peut s'écrire sous la forme de $2k$ ou $2k+1$ où k est un entier relatif quelconque.
4) L'égalité $37 = 3 \times 9 + 10$ traduit la division euclidienne de 37 par 3 ou par 9.
5) L'égalité $37 = 5 \times 7 + 2$ traduit la division euclidienne de 37 par 5 ou par 7.

***Exercice* 10.** Déterminer le quotient est le reste de la division euclidienne de a par b.

1) $a = 351$; $b = 12$
2) $a = -1001$ et $b = 31$
3) $a = -654$ et $b = -13$
4) $a = -601$ et $b = 12$.

***Exercice* 11.** On divise l'entier 256 par b, on trouve comme quotient 15 et comme reste r.
Quelles sont les valeurs possibles de b et de r ?

***Exercice* 12.** Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel impair par 4 ?

***Exercice* 13.** Écrire un algorithme qui prend comme argument a et b entiers naturels et qui renvoie le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

B. Congruence

***Exercice* 14.**
1) Soient a et b deux entiers tels que $a \equiv 3[7]$ et $b \equiv 1[7]$. Démontrer que $2a + b^2$ est un multiple de 7.
2) Soient a et b deux entiers tels que $a \equiv 2[5]$ et $b \equiv 3[5]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a^2 + 2b^2$ par 5.

***Exercice* 15.** Démontrer que $35^{228} + 84^{501} \equiv 0[17]$

***Exercice* 16.**
1) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ?
2) Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

***Exercice* 17.**
1) Quel est le reste de la division euclidienne de 8^{2020} par 5 ?
2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Démontrer que $a \equiv 0[7]$.
   (b) Que peut-on en déduire en terme de divisibilité ?

***Exercice* 18.** n désigne un entier naturel.

1) Quels sont les restes de la division euclidienne de 3^n par 11 ?
2) En déduire que $3^n + 7 \equiv 0[11]$ si, et seulement si, $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 19.** x et y sont deux entiers naturels tels que $x \equiv 7[9]$ et $y \equiv 4[9]$
Déterminer les restes dans la division euclidienne par 9 de :

1) $3x + 4y$
2) $x^2 + y^2$
3) $2x^2 - 5y^2$

***Exercice* 20.** Déterminer les valeurs de n pour lesquels l'entier $6^n + 4^n$ est divisible par 5.

***Exercice* 21.** Un rep-unit (répétition de l'unité) est un entier qui est formé uniquement de 1. Par exemple, le nombre 1111111.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 1111111 par 5, par 9 et par 11.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1111111)^8$ par 5, par 9 et par 11.

***Exercice* 22.** On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$3x \equiv 5[7]$$

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7 ?
2) En déduire les restes possibles de la division euclidienne de la division euclidienne de $3x$ par 7.
3) Quel est l'ensemble solution ?

***Exercice* 23.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$x^2 + 2 \equiv 0[9]$$

***Exercice* 24.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0[6]$$

***Exercice* 25.** Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante :

$$21^n - 12 \equiv 1[17]$$

C. Synthèse

***Exercice* 26.** 1) On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 13$ et de raison $q = 5$. Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne v_n par 4.

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+2} \equiv u_n[4]$$
   (b) Démonter que, pour tout entier naturel n :
   $$2u_n = 5^{n+2} + 3$$
   (c) Déduire de la question précédente qu'aucun terme de cette suite n'est divisible par 3.

***Exercice* 27.** Critère de divisibilité par 11.
Partie A

1) Vérifier que les nombres $34 + 43$, $57 + 75$, $93 + 39$ sont divisibles par 11.
2) On suppose que l'écriture décimale d'un entier x est $\overline{ab}$ avec $a \neq 0$, c'est à dire $x = 10a + b$.
   On note$y$ l'entier obtenu en intervertissant les chiffres de x. Démontrer que $x + y$ est divisible par 11.
3) Un entier x comportant quatre chiffres s'écrit dans le système décimal $\overline{abcd}$ avec $a \neq 0$. En utilisant les congruences modulo 11, démontrer que $x \equiv 0[11]$ si, et seulement si $-a + b - c + d \equiv 0[11]$.
4) En déduire que les entiers de quatre chiffres dont l'écriture décimale est de la forme $\overline{abba}$ avec $a \neq 0$ sont divisibles par 11.

Partie B
On considère un entier a définie par dont écriture décimale $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$ avec $a_n \neq 0$:

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$$

On dira que le rang du chiffre a_k est égal à k.

1) Démontrer qu'un entier est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres de rang pair diminuée par la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.
2) L'entier 15374876926816 est-il divisible par 11 ?

***Exercice* 28.** On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que, dans un repère du plan, les points de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2) (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est un entier naturel.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est un entier naturel.
3) (a) Montrer que x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3.
   (b) Montrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils n'ont pas de facteur premier commun dans leur décomposition en produit de facteurs premiers.
4) (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2).$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

***Exercice* 29.** Les nombres de Mersenne.
Pour n entier naturel non nul, on note M_n l'entier $M_n = 2^n - 1$.

1) Pour $1 \leqslant n \leqslant 15$, quels sont les nombres M_n premiers ?
2) (a) Soit k un entier naturel non nul et a entier quelconque. Montrer que $a - 1$ divise $a^k - 1$. (utiliser un résultat sur les suites géométriques)
   (b) En déduire que, si d divise n, alors $2^d - 1$ divise M_n.
3) Déduire de la question 2 que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

***Exercice* 30.** Racine carrées et irrationnels
On considère un entier n qui n'est pas un carré parfait (c'est à dire qui n'est pas le carré d'un autre entier).

1) Justifier que dans la décomposition de n en produit de facteur premiers il existe un ombre premier p dont l'exposant est impair.
2) On suppose que $\sqrt{n}$ est rationnel , c'est à dire qu'il existe des entiers naturels a et b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, on suppose également que cette fraction est irréductible.
   (a) Quelle est la parité de l'exposant de p dans la décomposition de nb^2
   (b) Quelle est la parité de tous les exposants dans la décomposition de a^2 ?
   (c) Que dire alors de l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$?
3) Conclure.

***Exercice* 31.** Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que $27^n \equiv 1[37]$.
Partie A : conjecturer à l'aide d'un programme :

1) Compléter la fonction ci-dessous de sorte qu'elle renvoie la liste de tous les entiers naturels m inférieurs ou égaux à n tels que $27^m \equiv 1[37]$.

```
def est_congru(n):
    """n est un entier naturel
    renvoie la liste de tous les entiers naturels m
    inférieurs ou égaux à $n$ tels que 27^m est congru à 1 modulo 37.$
    """
    L = []
    for ........................
        ...
        ...
    return ...
```

Coup de pouce ⚠
En langage Python :

- `a//b` renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b.
- `a%b` renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

2) Tester la la fonction est_congru.
3) Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $27^n \equiv 1[37]$.

Partie B : démontrer la conjecture

1) En vous aidant de la fonction est_congru, proposer un programme en langage Python qui affiche les restes successifs de 27^n par 37 lorsque n varie entre 0 et 6.

2) Compléter le tableau suivant à l'aide du programme précédent :

Reste de la division de n par 6	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 27^n par 37							

3) En déduire une démonstration de la conjecture émise.