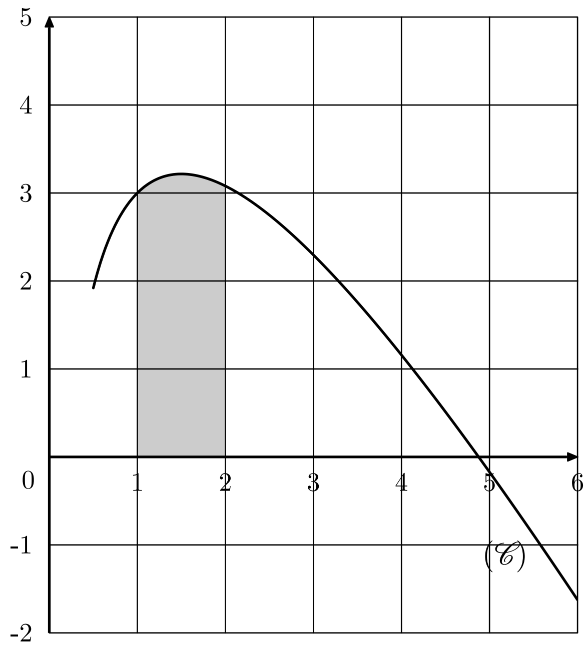
Intégrales et aires

Exercice 1

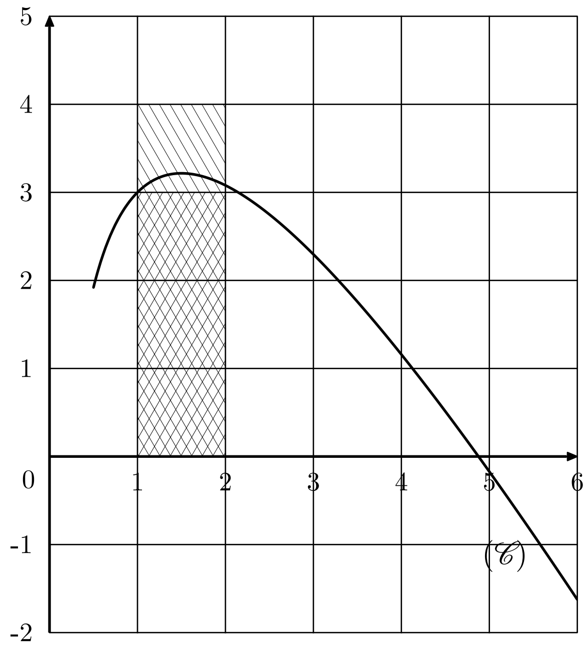
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$.



Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Correction 1

A l'aide du quadrillage donné, on peut encadrer ce domaine par les deux parties hachurées ci-desous :



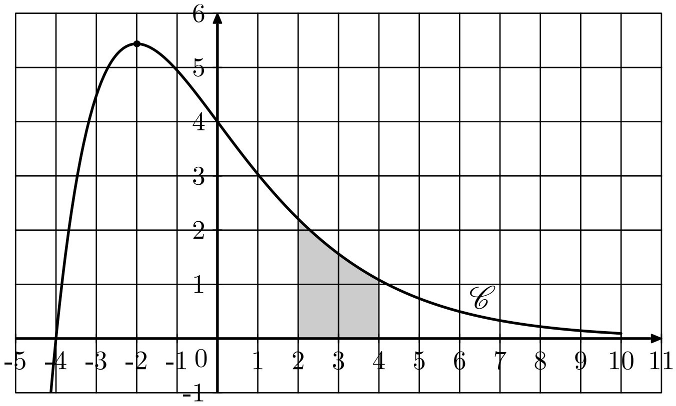
Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine est encadrée par :

$3 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 4$

Exercice 2

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

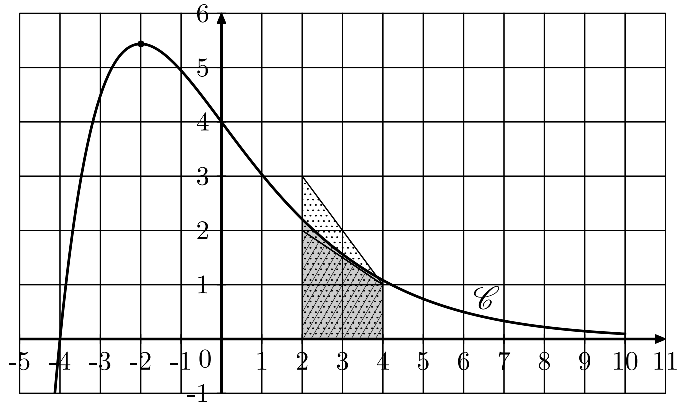
Le domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=2$ et la droite d'équation $x=4$.



Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure.

Correction 2

Ci-dessous, sont représentés en trait hacuhé ou en pointillé, deux domaines encadrant le domaine grisé :



Les deux domaines encadrant le domaine grisé sont composés d'un rectangle et d'un triangle grisée. On a les mesures :

- L'aire hachurée a pour aire :
$$\mathcal{A}' = 2\times1 + \frac{2\times1}{2} = 2+1 = 3$$
- L'aire en pointillé pour aire :
$$\mathcal{A}'' = 2\times1 + \frac{2\times2}{2} = 2+2 = 4$$

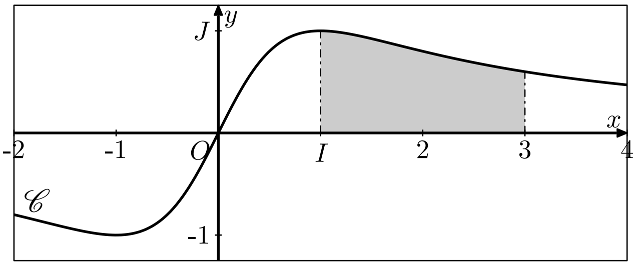
Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisée vérifie l'encadrement :

$3 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 4$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{2\cdot x}{x^2+1}$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

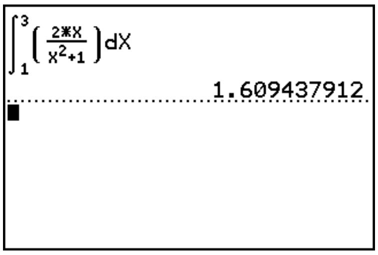
1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.

2. A l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

Correction 3

1. Le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par :
   - Les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
   - la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

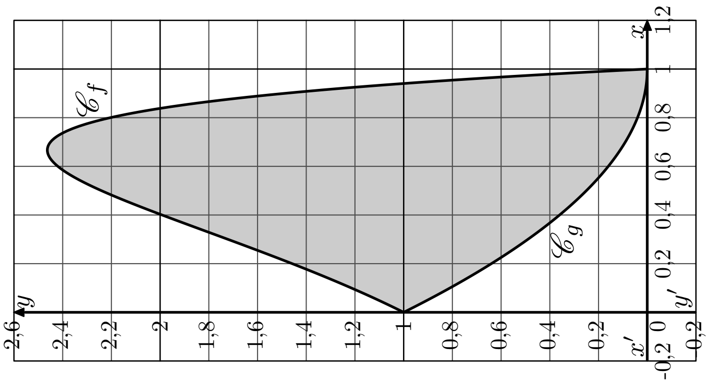
2. A l'aide de la calculatrice, déterminons l'aire du domaine $\mathcal{D}$ qui est déterminé par le calcul intégral :
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
Voici des captures d'écran de la calculatrice permettant ce calcul d'intégral :



Ainsi, on a la valeur approchée : $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 1{,}6094$

Exercice 4

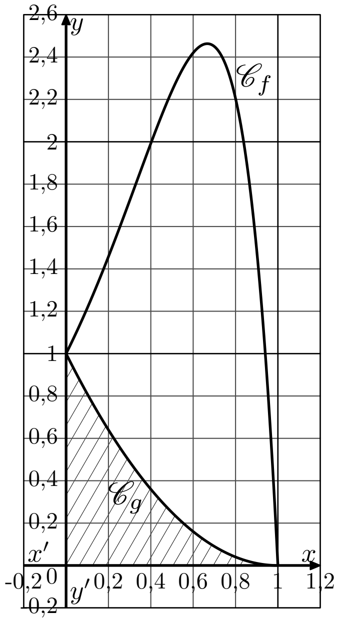
Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0\,;1]$ par :
$$f(x) = (1-x)\cdot e^{3x} \quad ; \quad g(x) = x^2 - 2\cdot x + 1$$
Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

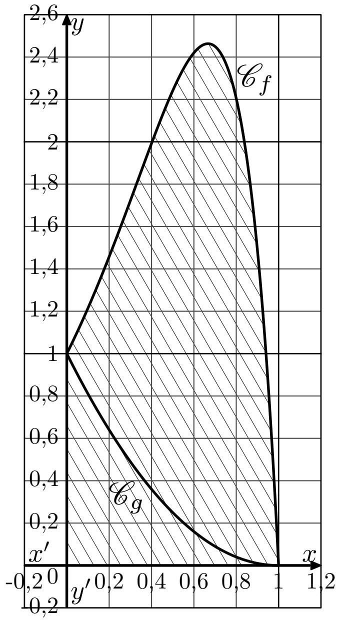


Déterminer l'aire, arrondie au millième près, de la partie grisée sur le graphique comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
(On justifiera les étapes de son raisonnement)

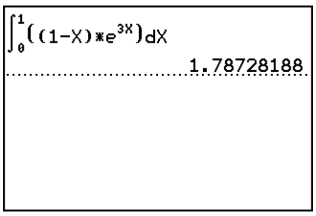
Correction 4

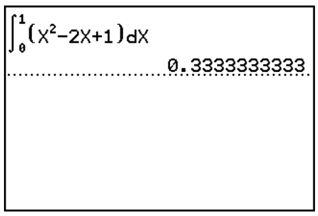
Pour déterminer l'aire du domaine grisé qui est situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:





- A l'aide de la calculatrice, l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ et coprise entre les droites $x=0$ et $x=1$ a pour mesure :
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x \simeq 1{,}78728$$
- A l'aide de la calculatrice, l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ et coprise entre les droites $x=0$ et $x=1$ a pour mesure :
$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - 2\cdot x + 1\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}33333$$





Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé a pour valeur :
$\mathcal{A} = 1{,}78728 - 0{,}33333 = 1{,}45395 \simeq 1{,}454$

