

Evaluation de mathématiques : BTS

Exercice 1 (5,5 points)

Un logiciel donne un développement limité d'une fonction :

```
(%i4) f(x):=1/(1+x^2);  
(%o4) f(x):=1/(1+x^2)  
  
(%i5) taylor(f(x), x, 0, 5);  
(%o5) 1-x^2+x^4+...
```

- 1) De quelle fonction s'agit-il ?
- 2) A quel ordre ?
- 3) Au voisinage de quel nombre ?
- 4) Ecrire mathématiquement le développement limité de cette fonction au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- 5) Ecrire mathématiquement le développement limité de cette fonction au voisinage de 0 à l'ordre 3.
- 6) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point 0.
- 7) Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente. Donner une explication.

Exercice 2 (2 points)

Extrait d'un sujet de BTS.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le développement limité en 0 à l'ordre 3 de f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1. On peut dire qu'une équation de la tangente T à \mathcal{C} est :

- a) $y = 2$; b) $y = -2 + x$; c) $y = 2 - x$.

2. Au voisinage du point d'abscisse 0,

- a) la courbe \mathcal{C} est au-dessus de T ;
b) la courbe \mathcal{C} est au-dessous de T ;
c) la courbe \mathcal{C} est au-dessous de T pour $x < 0$ et au-dessus de T pour $x > 0$.

Exercice 3 (6 points)

On donne une liste de développements limités.

```

(%i2) taylor(exp(x), x, 0, 5);
(%o2) 1 + x +  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$ 

(%i7) taylor(log(1+x), x, 0, 5);
(%o7) x -  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$ 

(%i8) taylor(sin(x), x, 0, 5);
(%o8) x -  $\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$ 

(%i9) taylor(cos(x), x, 0, 5);
(%o9) 1 -  $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$ 

(%i10) taylor(1/(1+x), x, 0, 5);
(%o10) 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...

(%i11) taylor((1+x)^2, x, 0, 5);
(%o11) 1 + 2 x + x^2 + ...

(%i13) taylor((1+x)^3, x, 0, 5);
(%o13) 1 + 3 x + 3 x^2 + x^3 + ...

```

En utilisant le DL de $\exp(x)$ au voisinage de 0, je peux dire sans calculatrice que

$$\exp(0,1) = 1 + 0,1 = 1,1$$

Sans calculatrice, par un petit calcul à la main, trouver :

$$\ln(1,1) \approx$$

$$\sin(0,1) \approx$$

$$\cos(0,1) \approx$$

$$\frac{1}{1,1} \approx$$

$$\frac{1}{1,1^2} \approx$$

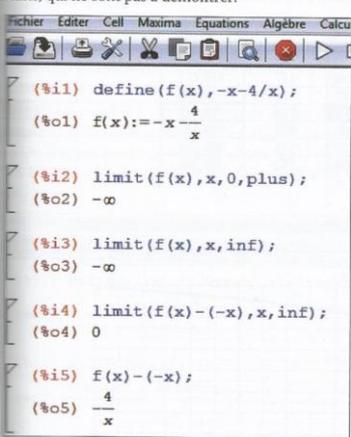
$$\frac{1}{1,1^3} \approx$$

Vous pouvez vérifier avec votre calculatrice.

Bonus : *pour vous aider, vous pouvez réaliser des constructions à la calculatrice.*

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x - \frac{4}{x}$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, qui ne sont pas à démontrer.



```

(%i1) define(f(x), -x - 4/x);
(%o1) f(x) := -x -  $\frac{4}{x}$ 

(%i2) limit(f(x), x, 0, plus);
(%o2) -∞

(%i3) limit(f(x), x, inf);
(%o3) -∞

(%i4) limit(f(x) - (-x), x, inf);
(%o4) 0

(%i5) f(x) - (-x);
(%o5)  $\frac{4}{x}$ 

```

1. a) Expliquer l'argument « plus » apparaissant dans l'instruction $\text{limit}(f(x), x, 0, \text{plus})$.

b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? En déduire que la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f admet une asymptote, dont on donnera une équation.

2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

3. a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)]$.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

4. Donner la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .

