Des suites pour dénombrer.

Extrait du diaporama en visio du mardi 2 décembre 2025,

Préparation au concours général de mathématiques,

Académie de Reims.

1 Des suites de 0 ou de 1.

n étant un entier naturel quelconque, combien y a t-il de n-uplets d'éléments 0 ou 1 ?

$$\underbrace{(0\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ \cdots;\ 1)}_{n \text{ éléments.}}$$

Notons s_n, le nombre de tels n-uplets.

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = 2 \qquad s_2 = 4 \qquad s_3 = 8 \qquad s_4 = 16$$

Une relation de récurrence vérifiée par la suite s :

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons s_{n+1}, c'est à dire le nombre de $(n+1)$-uplets d'éléments 0 ou 1.

Il y a deux types de tels $(n+1)$-uplets : ceux qui commencent par 0 et ceux qui commencent par 1.

- Les $(n+1)$-uplets commençant par 0 se complètent par n éléments : on en dénombre alors s_n.
- Les $(n+1)$-uplets commençant par 1 se complètent par n éléments : on en dénombre alors s_n.

Le nombre de $(n+1)$-uplets est égal au nombre de $(n+1)$-uplets commençant par 0 plus le nombre de $(n+1)$-uplets commençant par 1.
On a donc la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $\quad s_{n+1} = s_n + s_n \quad$ soit $s_{n+1} = 2s_n$

s est alors une suite géométrique de raison 2 et, avec $s_0 = 1$, on a $s_n = 2^n$.
Pour tout entier naturel n, on dénombre 2^n n-uplets d'éléments 0 ou 1.

2 Des n-uplets de 0 ou de 1 sans 00.

Soit n, un entier naturel.

Combien y a t-il de n-uplets d'éléments 0 ou 1 sans deux 0 consécutifs ?

Notons s_n, le nombre de tels n-uplets.

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons s_{n+2}, c'est à dire le nombre de tels $(n+2)$-uplets d'éléments 0 ou 1.

Il y a deux types de tels $(n+2)$-uplets : ceux qui commencent par 0 et ceux qui commencent par 1.

- Les $(n+2)$-uplets commençant par 1 se complète par $n+1$ éléments : il y a alors s_{n+1} tels $(n+2)$-uplets.
- Les $(n+2)$-uplets commençant par 0 ont leur deuxième élément égal à 1 et se complètent par n éléments : il y a alors s_n tels $(n+2)$-uplets.

Le nombre de tels $(n+2)$-uplets sans deux 0 consécutifs est égal au nombre de $(n+2)$-uplets commençant par 0 plus le nombre de $(n+2)$-uplets commençant par 1.

On a donc la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$.

Avec les données de $s_0 = 1$ et $s_1 = 2$, on peut démontrer, par récurrence forte, que le terme général de cette suite est

$$s_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

ce qui représente le nombre de n-uplets d'éléments 0 ou 1 sans deux 0 consécutifs ?

3 Des escaliers en marches.

Soit n, un entier naturel.

Vous disposez d'un escalier à n marches.

De combien de façons pouvez-vous monter cet escalier avec des pas de une ou deux marches ?

Notons c_n, le nombre de façons de monter cet escalier.

$$c_0 = 1 \qquad c_1 = 1 \qquad c_2 = 2 \qquad c_3 = 3 \qquad c_4 = 5$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons c_{n+2}, c'est à dire le nombre de façons de monter un escalier à $n+2$ marches.

- Soit on commence par monter une marche et il y a c_{n+1} façons de monter les $n+1$ marches restantes.
- Soit on commence par monter deux marches et il y a c_n façons de monter les n marches restantes.

Le nombre de façons de monter un escalier à $n+2$ marches est égal aux nombre de façons de monter $n+1$ marches plus le nombre de façons d'en monter n.

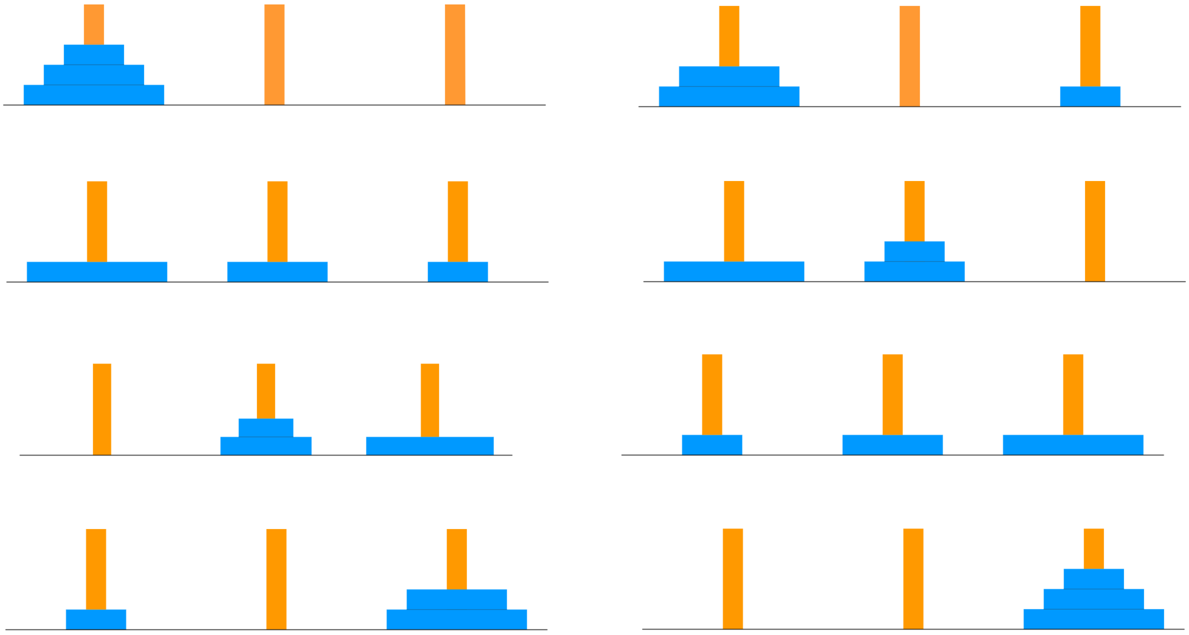
On a donc la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$.

Avec les données de $c_0 = 1$ et $c_1 = 1$, on peut démontrer, par récurrence forte, que le terme général de cette suite est

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

ce qui représente le nombre de façons de monter un escalier à n marches avec des pas de une ou deux marches.

4 Les tours de Hanoï.



Matériel :

3 piquets, n disques troués de diamètres distincts deux à deux.

But du jeu :

Transférer la pyramide du piquet de gauche vers le piquet de droite.

Contraintes :

- Déplacer un seul disque à la fois sur le piquet de votre choix.
- Jamais un grand disque sur un petit disque.

Un tel transfert est-il possible ?

Et si oui, en quel nombre minimum de déplacements de disque ?

Pour un entier n non nul, soit $\mathcal{P}_n$, la proposition

"Le transfert d'une pyramide à n disques d'un piquet à un autre est possible".

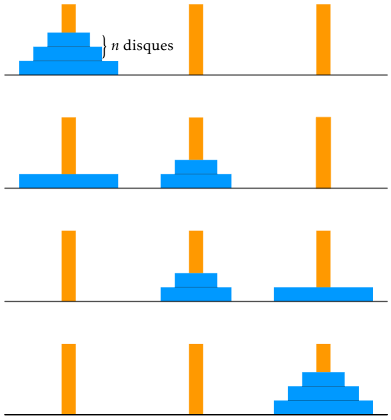
Initialisation : $\mathcal{P}_1$ est la proposition

"Le transfert d'une pyramide à 1 disque d'un piquet à un autre est possible." ce qui est vrai.

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n, un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

Considérons alors une pyramide à $n+1$ disques sur le piquet de gauche.



1. D'après $\mathcal{P}_n$, on peut déplacer les n plus petits disques vers le piquet du milieu.

2. On déplace alors le grand disque vers le piquet de droite.

3. D'après $\mathcal{P}_n$, on peut déplace les n disques vers le piquet de droite.

La pyramide à $n+1$ disques est transférée vers le piquet de droite donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Pour tout $n \geq 1$, le transfert d'une pyramide à n disques d'un piquet à un autre est possible en particulier du piquet de gauche à celui de droite.
Cette démonstration par récurrence nous donne aussi le nombre minimal, d_n, de déplacements de disques.

En effet, en dénombrant le nombre de disques lors des trois étapes précédentes, on a $d_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $d_{n+1} = 2d_n + 1$.

On démontre alors par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $d_n = 2^n - 1$.

5 Des régions du plan.

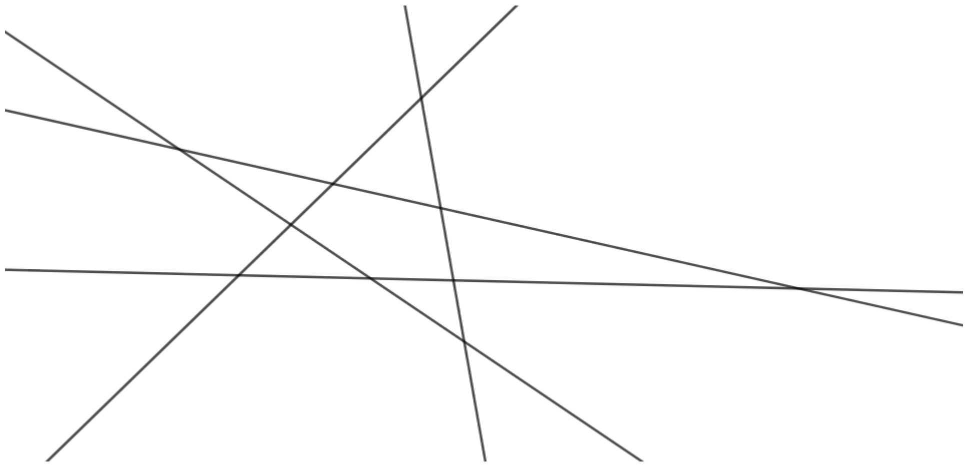
Dans le plan, soit n droites non parallèles deux à deux et non concourantes trois à trois.

Combien de régions du plan, ces droites délimitent-elles ?

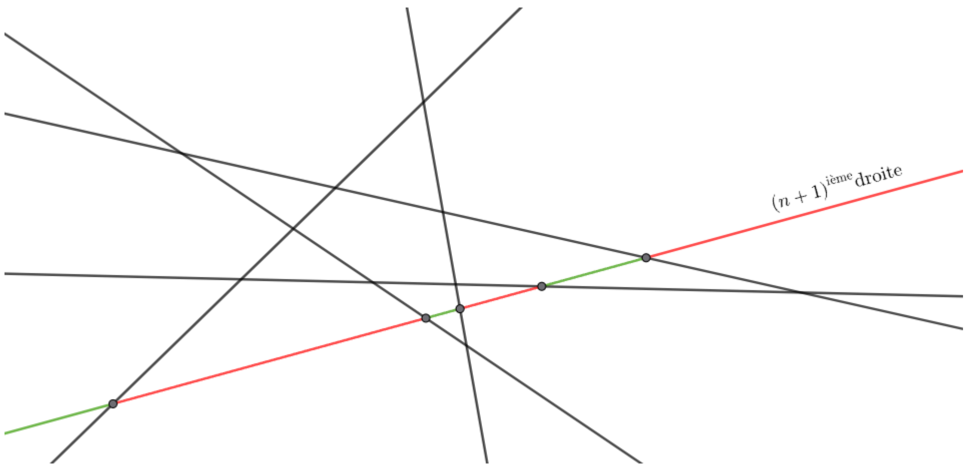
Notons d_n, le nombre de régions du plan.

$$d_0 = 1 \qquad d_1 = 2 \qquad d_2 = 4 \qquad d_3 = 7 \qquad d_4 = 11$$

Dans la figure, ci-dessous on considère n droites et d_n régions.



Une $(n+1)^{\text{ième}}$ droite rencontre les n droites en n points compte tenu des hypothèses de position relative de ces droites.



Sur cette $(n+1)^{\text{ième}}$ droite se trouve $n+1$ segments ou demi-droites qui séparent, chacun(e), une ancienne région en deux.

Il y a alors $n+1$ régions de plus qu'avant, d'où la relation de récurrence $d_{n+1} = d_n + n + 1$.

Par télescopage et par la formule de la somme de n premiers entiers non nuls, on obtient $d_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$, ce qui représente le nombre de régions du plan délimitées par n droites.

6 Les coefficients binomiaux :

Définition 1

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments pris dans un ensemble à n éléments.

Propriété 1 (Formule de Pascal)

Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n+1$. On a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Démonstration : (Preuve ensembliste)

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments. Soit a, un élément de E (E est non vide car $n+1 \geq 1$).

Par définition, il y a $\binom{n+1}{k}$ parties de k éléments pris parmi les $n+1$ éléments de E.

Ces parties sont soit celles qui contiennent a soit celles qui ne contiennent pas a.

Il y a $\binom{n}{k-1}$ parties qui contiennent a. Il y a $\binom{n}{k}$ parties qui ne contiennent pas a.

On en déduit que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Propriété 2 (Formule du coefficient binomial)

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration : (Par récurrence sur n)

Soit $\mathcal{P}_n$, la proposition "Pour tout entier naturel k tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$"

Initialisation : pour $n = 0$, $0 \leq k \leq n$ donc $k = 0$ et $\binom{0}{0} = 1$ et $\frac{0!}{0!0!} = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Soit k, un entier tel que $0 \leq k \leq n+1$.

Si $k = 0$ alors $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1$ donc $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$.

Si $k=n+1$ alors $\binom{n+1}{n+1}=1$ et $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!}=1$ donc $\binom{n+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$.

Si $1 \leq k \leq n$ alors, d'après la formule de Pascal,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} && \text{Pour réduire au même dénominateur, on utilise} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)}+\frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!} && k!=(k-1)!k \quad \text{et} \quad (n-k+1)!=(n-k)!(n-k+1) \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}+\frac{kn!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+kn!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}
\end{aligned}$$

donc $\binom{n+1}{k} = \dfrac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}$ donc $\binom{n+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$.

Pour tout entier naturel k tels que $0 \leq k \leq n+1$, $\binom{n+1}{k} = = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Pour tout entier naturel n, pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

7 Permutations particulières.

Trouver le nombre de permutations $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \dots\ ;\ a_n)$ de l'ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ telles qu'il existe un unique indice i entre 1 et $n-1$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$.

(Olympiades bulgares 1995)

Correction sur demande...