Mercredi 4 décembre 2024

Dénombrement.

A la fin de cet exposé, vous saurez, entre autres, compter le nombre de façons de monter un escalier avec des pas de une ou deux marches ou encore évaluer si un *full* au poker arrive plus fréquemment qu'une *couleur*.

Les techniques de dénombrement et leurs applications sont très nombreuses. Leur éventuelle complexité nous incite à formaliser des situations de comptage qui se rencontrent très souvent.

Sommaire

1 Principes fondamentaux de dénombrements :

1.1 Cardinal d'un ensemble :

Définition 1

Soit E, un ensemble fini.

Le **cardinal** de E est l'entier naturel égal au nombre d'éléments de E.

On le note $|E|$ ou encore $\text{Card}(E)$.

Exercice n° 1 :

1. E est l'ensemble des lycées de l'académie participant au concours général. A quoi est égal $|E|$?
2. E est l'ensemble des entiers entre 2 et 9. On a alors $E = \{ 2 ; 3 ; \cdots ; 9\}$. Donner $\text{Card}(E)$.
3. Soit $E = \mathbb{Z} \cap]-3{,}001 ; 9{,}99]$. Décrire E plus simplement. Donner $|E|$.
4. Concernant $\emptyset$, l'ensemble vide.
   (a) A quoi est-égal $\text{Card}(\emptyset)$?
   (b) Soit E, un ensemble. Donner une proposition équivalente à la proposition "$\text{Card}(E) = 0$".
   (c) Soit E, un ensemble non vide. En déduire une inégalité sur $|E|$.

5. Créer deux ensembles dont les cardinaux sont égaux à 3 et à 2 respectivement.
6. L'ensemble E contient moins de 32 éléments et au moins 5 éléments. Donner un encadrement de $|E|$.
7. Soit $E = \{ a\ ;\ b\ ;\ c \}$, un ensemble à trois éléments.
   (a) Former tous les sous-ensembles inclus dans E (il doit y en avoir 8).

   On note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E ou encore l'ensemble des **parties** de E.

   (b) Donner $|\mathscr{P}(E)|$.

   (c) Maintenant $E = \{ a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d \}$ a quatre éléments. Conjecturer $\text{Card}(\mathscr{P}(E))$.
8. Soit E, l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 3x = 0$. Calculer $|E|$.
9. Soit $A = \{ a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d \}$ et $B = \{ a\ ;\ c\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g \}$ deux ensembles.
   (a) Décrire A et B à l'aide d'un diagramme de Venn (avec des patates).

   (b) Donner $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$.

   (c) Décrire, dans le diagramme, $A \cap B$ et $A \cup B$. Donner leurs cardinaux.

   (d) Trouver une relation qui semble se généraliser entre les cardinaux de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Voir la solution.

1.2 Cardinal d'une union d'ensembles :

Propriété 1

Soit E, un ensemble.

Soit A et B, deux sous-ensembles finis de E.

Si A et B sont **disjoints** alors $\quad \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

Si A et B sont **ne** sont **pas** disjoints alors $\quad \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Démonstration :

La première identité est admise. Pour la deuxième...

Rappel :

Pour A et B deux ensembles, $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

On a alors, pour tout élément a, $\quad a \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A$ et $a \notin B$.

Aidons-nous d'un diagramme de Venn !

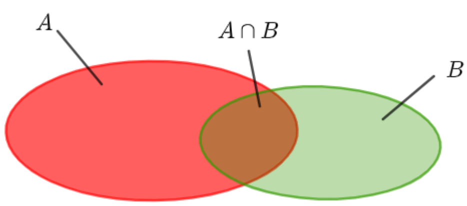
$A \cup B$ est union disjointe de A et $B \setminus A$.

On a alors $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$.

B est union disjointe de $(B \setminus A)$ et $A \cap B$ donc $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$

donc $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.

On en déduit alors que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.



Exercice n° 2 :

1. Soit M, l'ensemble des lettres qui forment le mot mathématiques. Soit P, l'ensemble des lettres qui forment le mot physique. Identifier $M \cap P$ puis calculer $|M \cup P|$.
2. M et C sont les ensembles d'élèves venant respectivement des lycées Vauban et Diderot.

   A t-on $|M \cup C| = |M| + |C|$?
3. Soit A, B et C trois ensembles.
   (a) A l'aide d'un diagramme avec $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, persuadez-vous que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   (b) En remarquant que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$,

   montrer que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Voir la solution.

Propriété 2

Soit E_1, E_2,... et E_p, p ensembles finis disjoints deux à deux. On a

$$|E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p| = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_p|.$$

Autrement dit,
$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \text{Card}(E_k).$$

Démonstration :

Par récurrence sur $p \geq 1$. Avec la relation de récurrence $\left(\bigcup_{k=1}^{p+1} E_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) \cup E_{p+1}$.

Remarque :

"E_1, E_2,... et E_p sont **disjoints deux à deux**" équivaut à "Pour tous i et j entre 1 et p avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$".

Exercice n° 3 :

E_1, E_2,... et E_p sont des ensembles disjoints deux à deux tels que, pour tout entier k entre 1 et p, $|E_k| = 2k+1$.

Calculer $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right)$. Voir la solution.

1.3 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles :

Définition 2

Soit E et F deux ensembles.

Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples $(e\,;\,f)$ tes que $e \in E$ et $f \in F$.

Ce produit cartésien se note $E \times F$.

On a a alors $(x\,;\,y) \in E \times F \quad \Leftrightarrow \quad x \in E$ et $y \in F$.

Exercice n° 4 :

1. Soit $E = \{ a \,;\, b \,;\, c \}$ et $F = \{ b \,;\, e \}$.

   A l'aide d'un tableau énumérer les éléments de $E \times F$. Combien y en a t-il ?

2. Où retrouve t-on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (que l'on note aussi $\mathbb{R}^2$) ?

3. Citer quatre éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{N}^2$.

4. A quoi est-égal $\emptyset \times \mathbb{N}$?

5. A t-on $(-3 \,;\, \frac{2}{7}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$? A t-on $(4 \,;\, \pi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$?

6. Soit A, B et E des ensembles. Que pensez-vous de l'égalité $(A \cup B) \times E = (A \times E) \cup (B \times E)$?

Voir la solution.

Propriété 3

Soit E et F deux ensembles finis. On a

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, le cardinal de E, en écrivant que $E = E' \cup \{e\}$ où e est un élément de E.

Remarque :

Une façon plus intuitive de calculer $\text{Card}(E \times F)$ est de dire qu'un élément de E forme $|F|$ éléments de $E \times F$ donc les $|E|$ éléments de E forment les $|E| \times |F|$ éléments de $E \times F$. On retrouve aussi ce résultat à l'aide d'un tableau rectangulaire à deux entrées.

Exercice n° 5 :

1. On reprend les ensembles de lettres M et P de l'exercice n° 2.1. Calculer $|M \times P|$.

2. Calculer $|\emptyset \times M|$. Cela corrobore-t-il la réponse du 4.4 ?

3. On a $|A \times B| = 56$ et $|A| = 14$. A quoi est-égal $|B|$?

Voir la solution.

Définition 3

Soit E_1, E_2,... et E_n, n ensembles.

$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-**uplets** $(e_1 \,;\, e_2 \,;\, \cdots \,;\, e_n)$ où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$ et ... et $e_n \in E_n$.

En particulier, un n-uplet d'un ensemble E est une suite de n éléments de E.

L'ensemble des n-uplets de E se note E^n (c'est $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ facteurs}}$).

Remarques :

- Un couple d'éléments de E est un élément de E^2. Un élément de E^3 est un triplet d'éléments de E...
- Où retrouve t-on $\mathbb{R}^3$?
- Un n-uplet est une liste **ordonnée** d'éléments. Par exemple, $(2\ ;\ 3) \neq (3\ ;\ 2)$.

Propriété 4

Soit E_1, E_2,... et E_n, n ensembles finis. On a

$$|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p| = |E_1| \times |E_2| \times \cdots \times |E_p|.$$

En particulier, si E est un ensemble et $n \geq 1$ alors $\qquad \text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$

Démonstration :

Par récurrence sur n, en écrivant que $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{n+1} = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \times E_{n+1}$.

Remarques :

Le jeu de déS, une série de pile ou face, des tirages avec remises seront modélisés par les éléments de E^n.

Exercice nº 6 :

1. Un code secret est composé de 4 chiffres. Le premier est non nul, le second est pair, le troisième est impair et le dernier est multiple de 3. Décrire l'ensemble où se trouve un tel quadruplet. Quel est alors le nombre de codes possibles ?
2. On considère ici $\{0\ ;\ 1\}^n$ où $n \geq 1$.
   (a) Le nombre de n-uplets d'éléments pris dans $\{0\ ;\ 1\}$ est ....". Compléter.
   (b) Soit $E = \{e_1\ ;\ e_2\ ;\ \cdots\ ;\ e_n\}$, un ensemble à n éléments.
   Pourquoi y a t-il autant de n-uplets de 0 ou 1 que de parties dans E ? Calculer $|\mathscr{P}(E)|$.
   (c) Où avez-vous déjà aussi rencontré $\{0\ ;\ 1\}^n$?
3. On reprend les ensembles de lettres M et P de l'exercice n° 2.1.
   (a) Calculer $|M^4|$. Combien de mots de 4 lettres peut-on faire avec les lettres du mot mathématiques ? (un mot, ici, est un quadruplet de lettres, le mot ayant ou non une signification)
   (b) Que dénombre $|P^3|$?
   (c) En terme de mots à quoi correspond un élément de $P^2 \times M^2$? Et $(P \times M)^2$?
   (d) On jette 5 dés, l'un après l'autre, et on note les 5 faces. On obtient alors un élément de ... ?

Voir la solution.

Remarques :

- Une autre façon de dénombrer les p-uplets est d'appliquer le **principe multiplicatif** :
  "Une expérience se déroule en p étapes dont chacune a n_1, n_2,... et n_p choix respectivement.
  Le nombre d'issues de cette expérience est alors $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$."
- On peut aussi dénombrer les p-uplets en construisant l'arbre des choix. Du premier nœud, n_1 arêtes débouchent sur les nœuds "choix de la première étape". A chacun de ces nœuds, n_2 arêtes débouchent sur les "choix de la deuxième étape" et ainsi de suite... jusqu'au $n_1 n_2 \dots n_{p-1}$ arêtes qui débouchent chacune sur les n_p choix de la dernière étape pour donner $n_1 n_2 \dots n_{p-1} n_p$ issues.

Exercice n° 7 :

1. A la cantine, chacun prend obligatoirement entrée-plat-fromage-dessert. Le café est facultatif.
   Appliquer le principe multiplicatif pour obtenir le nombre de repas possibles à la cantine sachant qu'il y a 4 entrées, 2 plats principaux, 3 fromages et 4 desserts et un café.
2. Au tiercé, pour compter les triplets gagnants possibles parmi 13 chevaux au départ, on forme des éléments de E^3 où E désignent l'ensemble des 13 numéros de chevaux. Cependant, il y a des triplets de E^3 qui ne représentent pas un triplet gagnant. Décrire ces triplets.

Voir la solution.

Quand les n-uplets d'un ensemble E sont constitués d'éléments deux à deux distincts, on parlera alors d'...

2 Arrangement de k éléments pris parmi n :

Définition 4 (Arrangement)

Soit E, un ensemble à n éléments.

Soit k, un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments de E **distincts deux à deux**.

Remarque :

On parlera souvent d'un **arrangement de k éléments pris parmi** n.

Exercice n° 8 :

Énumérer tous les arrangements de 2 (resp. 1 et 0) éléments pris dans $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$.

Voir la solution.

Propriété 5

Soit n et k, deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

Le nombre d'arrangements de k éléments pris parmi n est égal à

$$\mathcal{A}_n^k = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$$

Démonstration :

On dénombre les k-uplets de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ où $|E_1| = n$ et $|E_2| = n-1$ et ... et $|E_k| = n-k+1$.

Remarques :

Les arrangements modélisent les listes **ordonnées** de k objets pris parmi n, les tirages sans remise,...

Exercice nº 9 :

1. Vérifier la formule avec les arrangements de l'exercice n° 8.
2. Combien y a t-il de triplets gagnants possibles à l'arrivée pour 13 chevaux ?
3. Calculer très vite $\mathcal{A}_{100}^1$, $\mathcal{A}_{100}^2$ et $\mathcal{A}_{101}^3$.
4. Une urne contient 11 boules numérotées de 1 à 11. On en tire 4 à la suite sans remise. Combien y a t-il de tirages possibles ?
5. Dériver k fois la fonction monôme définie par $f(x) = x^n$. On commencera par $k = 1$, $k = 2$,...

Voir la solution.

3 Permutation d'un ensemble :

Définition 5 (Permutation)

Soit E, un ensemble à n éléments.

Un **permutation** de E est un arrangement des n éléments pris dans E.

Exercice nº 10 :

Soit $E = \{ R ; V ; B \}$. Former les permutations de E. Combien y en a t-il ?

Voir la solution.

Remarques :

- Une permutation est un élément particulier de $E^{|E|}$: ses éléments sont deux à deux distincts.
- Pour l'ensemble vide, il n'y a qu'une seule permutation : la liste vide (). Pour un singleton tel que $\{ e \}$, il n'y a qu'une seule permutation : (e).

- Les permutations de $E = \{ P ; F \}$ sont les couples $(P ; F)$ et $(F ; P)$.
- Une urne contient des boules toutes distinctes. En les tirant toutes, à la suite et sans remise, on obtient une permutation de l'ensemble de toutes les boules.
- Avec un jeu de 32 cartes, on obtient une permutation de l'ensemble de ces 32 cartes en les alignant les unes après les autres.
- On connaît le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments : c'est $\mathcal{A}_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ d'où la...

Définition 6 (Factorielle)

Soit n un entier naturel.

Le **nombre de permutations** d'un ensemble à n éléments se note $n!$ et se lit "**factorielle** n".

Plus précisément, $0! = 1$ et $1! = 1$ et $2! = 2$ et pour tout $n \geq 3$,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \text{ ou encore } n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarques :

- La suite u des factorielles n est la suite d'entiers naturels $u = (1 ; 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120 ; 720 ; 5040 ; \cdots)$.

  Elle est définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
- La priorité de calcul étant donnée à la factorielle, on a les identités $(n+1)n! = (n+1)!$ et $\dfrac{(n+1)!}{n+1} = n!$.
- On démontre que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$ d'où la croissance très très rapide de $n!$ vers $+\infty$.

Exercice n° 11 :

1. 8 personnes déposent chacune un cadeau dans un sac. Ces cadeaux sont alors redistribués aux 8 personnes. Combien y a-t-il de redistributions possibles ?
2. Soit $n \geq 4$. Réduire la fraction $\dfrac{n!}{(n-4)!}$. Calculer, réduire $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$. Voir la solution.

Propriété 6

Pour tous entiers k et n tels que que $0 \leq k \leq n$,

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration :

$\mathcal{A}_n^k \times (n-k)! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k)! = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 1 = n!$

d'où la propriété.

Cette formule n'est pas la plus aisée à appliquer mais elle nous servira pour les...

4 Combinaisons d'un ensemble :

4.1 Définitions, premières propriétés :

Définition 7

Soit E, un ensemble de cardinal n et k un entier naturel inférieur à n.

Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

Remarques :

- Les combinaisons de $E = \{ a \,;\, b \}$ sont $\emptyset$, $\{ a \}$, $\{ b \}$ et E.
- On ne confondra pas un arrangement de k éléments de E avec une combinaison de k éléments de E. La première liste a ses éléments entre parenthèses et tient compte de l'ordre des éléments. La seconde liste a ses éléments entre accolades sans tenir compte de l'ordre. On a par exemple $\{ a \,;\, b \} = \{ b \,;\, a \}$.

Propriété 7

Soit k et n, deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n est égal à $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

L'entier naturel $\binom{n}{k}$ est appelé "coefficient binomial n, k".

Si $k > n$ alors $\binom{n}{k} = 0$.

Démonstration :

Une combinaison de k éléments pris parmi n forme $k!$ permutations donc $k!$ arrangements de k parmi n donc $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments pris parmi n forment $\binom{n}{k} \times k!$ arrangements de k éléments pris parmi n donc $\binom{n}{k} \times k! = \mathcal{A}_n^k$ donc $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ donc $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Quand $k > n$ il n'y a pas de combinaisons de k éléments pris parmi n donc $\binom{n}{k} = 0$.

Remarques :

- Lorsque qu'on tire simultanément k boules parmi n on forme une combinaison de boules.
- Dans une des versions du poker, une main est une combinaison de 5 cartes prises parmi 32.
- Pour réduire $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, en un premier temps, on simplifiera $n!$ avec le plus grand de $k!$ ou de $(n-k)!$.
- A retenir : $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$ et $\dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Propriété 8

Pour tout entier n et tout entier k, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

Démonstration combinatoire :

En formant une combinaison C de k éléments pris parmi n éléments de E, on forme la combinaison $E \setminus C$ de $n-k$ éléments pris parmi n. Il y a alors autant de combinaisons de k éléments pris parmi n que de combinaisons de $n-k$ éléments pris parmi n.

Exercice n° 12 :

Test de vocabulaire ! Soit $E = \{4 ; 5 ; 6 ; 7\}$.

Si un élément de la première ligne est un élément de la première colonne, cochez la case correspondante.

	$\emptyset$	$\{6 ; 4\}$	$(6 ; 5)$	$(5 ; 4 ; 5)$	$(8 ; 4 ; 5)$	5	$\{7\}$	$(7 ; 7)$	$(7 ; 6 ; 4 ; 5)$	$(7 ; 4 ; 6)$
Une partie de E										
Un n-uplet de E										
Un élément de E^3										
Un arrangement de E										
Une permutation de E										
Un élément de E										
Une combinaison de E										

Voir la solution.

Exercice n° 13 :

1. Calculer, réduire $\dbinom{45}{3}$, $\dbinom{27}{7}$ et $\dbinom{10}{9}$.
2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $n \geq 3$ et $p \in [0 ; 1]$. Calculer $P(X = 3)$.
3. Au poker, quel est le nombre de mains de cinq cartes tirées d'un jeu de 32 cartes ?
4. Au poker, combien y a t-il de mains avec une paire de valets .(Ex : { VP ; VK ; 8T ; 8K ; RT}).

   (*Stratégie* : construire une telle main par étapes en dénombrant les choix de chaque étape. Le principe multiplicatif achève de dénombrer.)

(a) On commence à choisir une paire de valets. De combien de façons ?

(b) On choisit ensuite une combinaison de trois cartes parmi 28. De combien de façons ?

(c) Donner alors le nombre de mains de 5 cartes avec une paire de valets.

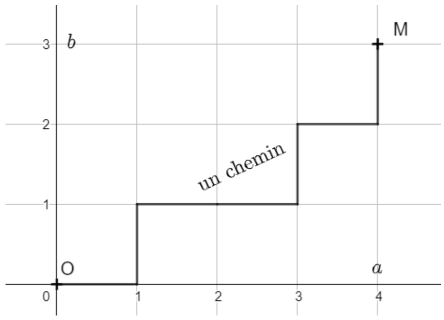
5. Au poker, combien y a t-il de mains avec un full c'est à dire une paire accompagnée d'un brelan ? (Ex : { VP ; VC ; 7T ; 7K ; 7P})

Voir la solution.

Exercice n° 14 :

1. Dénombrer les n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ contenant k "0" où $0 \leq k \leq n$.

2. Soit $(a\ ;\ b) \in \mathbb{N}^2$. On appelle chemin de $O(0\ ;\ 0)$ à $M(a\ ;\ b)$, toute ligne brisée allant de O vers M en se déplaçant d'une abscisse vers la droite ou d'une ordonnée vers le haut.
   Chaque chemin est alors représenté par un unique $(a+b)$-uplet contenant a lettres D et b lettres H.
   Quel est le nombre de chemins allant de O vers M ?



3. Quel est le nombre de p-uplet $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_p)$ de $(\mathbb{N}^*)^p$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ où n est un entier naturel donné ?
   (Pour n bien choisi, on pourra jalonner la droite des réels avec les entiers de 0 à n.)

Voir la solution.

4.2 Des identités combinatoires :

Propriété 9 (Formule de Pascal)

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration :

On utilise la convention : $\binom{n}{k} = 0$ lorsque k ou n sont des entiers négatifs.

Pour les cas marginaux $k = 0$ ou $n = 0$ ou $k \geq n$, on vérifie la formule. Sinon pour $1 \leq k \leq n-1$,

Preuve calculatoire :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

On a, pour réduire au même dénominateur, les identités $n! = (n-1)!n$ et $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$ d'où

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ d'où } \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Preuve combinatoire :

Soit E, un ensemble à n éléments. Soit a, un élément de E (E est non vide car $1 \leq n-1$).

Par définition, il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments pris parmi les n éléments de E.

Ces combinaisons sont soit celles qui contiennent a soit celles qui ne contiennent pas a.

Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons qui contiennent a. Il y a $\binom{n-1}{k}$ combinaisons qui ne contiennent pas a.

On en déduit que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Calcul des coefficients binomiaux de proche en proche avec le **triangle de Pascal**.

Par défaut, les cellules blanches contiennent la valeur 0 de coefficients binomiaux nuls.

Les cellules jaunes contiennent les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$.

On saisit $\boxed{1}$ dans $C3$ puis $\boxed{= B3 + C3}$ dans $C4$. Cette formule est recopiée dans les cellules jaunes ver les bas et vers la droite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n ↓ p →	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	-1											
3	0		1									
4	1		1	1								
5	2		1	2	1							
6	3		1	3	3	1						
7	4		1	4	6	4	1					
8	5		1	5	10	10	5	1				
9	6		1	6		=E8+F8		6	1			
10	7		1	7	21	35	35	21	7	1		
11	8		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
12	9		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
13												

Propriété 10 (Formule de Binôme de Newton)

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n non nul ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, en se servant des propriétés de factorisation et de développement de la somme $\sum$.

Exercice n° 15 :

1. Soit x, un réel. Développer $(x+10)^6$.
2. En choisissant les réels a et b convenablement dans la formule de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

   Donner une preuve combinatoire de cette formule.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$. Calculer, pour x non nul, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}$.
4. Montrer que $\sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$ et que $\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$.
5. En dérivant membre à membre les fonctions suggérées dans l'identité $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$,

   montrer que $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

Voir la solution.

Exercice n° 16 :

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.
Montrer par une preuve combinatoire que $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n}{p-k}=\binom{2n}{p}$.
(On considérera l'ensemble à $2n$ éléments $E=\{e_1\ ;\ e_2\ ;\ \ldots\ ;\ e_n\ ;\ f_1\ ;\ f_2\ ;\ \ldots\ ;\ f_n\}$.)
L'identité de Van der Monde (mathématicien français 1735 - 1796) généralise l'identité précédente.
La voici ! Soit a, b et p des entiers naturels tels que $0 \leq p \leq a+b$. On a $\sum_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}=\binom{a+b}{p}$.

Voir la solution.

5 Dénombrer avec les suites :

Lorsqu'un processus de récurrence apparait dans la construction d'éléments à dénombrer il est naturel de poser u_n, le nombre de ces éléments à l'étape n. Il s'en dégage une relation de récurrence de la suite u et donc un moyen de calculer u_n.

Exercice n° 17 :

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Combien y a t-il de n-uplet de $\{0\ ;\ 1\}^n$ qui ne comportent pas deux "0" consécutifs ?

   Comme souvent, on examine les "petites" valeurs de n !

   Pour $n = 1$, il y a **deux** 1-uplets : (0) et (1).

   Pour $n = 2$, il y a **trois** couples : $(0\ :\ 1)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 1)$.

   Pour $n = 3$, il y a **cinq** triplets : des trois couples précédents on peut coller à chacun un 1 et on peut coller un 0 qu'à deux des trois couples précédents.

   Pour $n = 4$, il y a **huit** triplets : des cinq couples précédents on peut coller à chacun un 1 et on peut coller un 0 qu'à trois des cinq couples précédents.

   Posons u_n le nombre de tels n-uplet. Il semblerait que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout entier naturel non nul. Démontrer cette conjecture.

2. Je monte un escalier à n marches avec un pas de 1 ou 2 marches. De combien de façons, puis-je monter cette escalier ?

3. Dans le plan (D_1), (D_2),..., (D_n), des droites non parallèles deux à deux entre elles et non concourantes trois à trois entre elles.

   Combien de régions du plan, ces droites forment-elles ?

4. Trouver le nombre de permutations $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \dots\ ;\ a_n)$ de l'ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$ telles qu'il existe un unique indice i entre 1 et $n-1$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$.

(Olympiades bulgares 1995)

Voir la solution.

Correction des exercices.

Exercice n° 1 : (retour)

1. $|E| = 21$ cette année.
2. Donner $\mathrm{Card}(E) = 8$.
3. $E = \{-3\ ;\ -2\ ;\ \cdots\ ;\ 9\}$ donc $|E| = 13$.
4. Concernant $\emptyset$, l'ensemble vide.
   (a) $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$?
   (b) $\mathrm{Card}(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \emptyset$.
   (c) E est non vide donc $|E| \geq 1$.
5. $A = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $B = \{0\ ;\ 1\}$.
6. $5 \leq |E| \leq 31$.

7. Soit $E = \{ a ; b ; c \}$, un ensemble à trois éléments.

   (a) $\emptyset$, $\{ a \}$, $\{ b \}$, $\{ c \}$, $\{ a ; b \}$, $\{ a ; c \}$, $\{ b ; c \}$ et E.

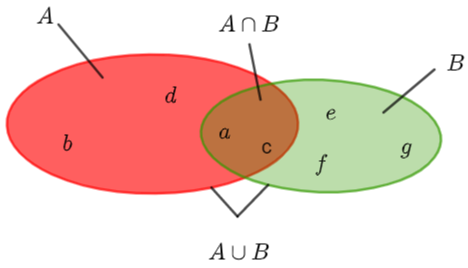
   (b) $|\mathscr{P}(E)| = 8$.

   (c) $E = \{ a ; b ; c ; d \}$. Dans $\mathscr{P}(E)$ il y a déjà les 8 sous-ensembles précédents. On en forme encore 8 en adjoignant à chacun des 8 précédents l'élément d donc $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 16$.

8. $x^3 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-3)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = 0$

   donc $|E| = 3$.

9. Soit $A = \{ a ; b ; c ; d \}$ et $B = \{ a ; c ; e ; f ; g \}$ deux ensembles.

   (a) Diagramme de Venn :

   (b) $\text{Card}(A) = 4$ et $\text{Card}(B) = 5$.

   (c) $\text{Card}(A \cap B) = 2$ et $\text{Card}(A \cup B) = 7$.

   (d) $|A \cup B| = |A + |B| - |A \cap B|$.

Exercice n° 2 : (retour)

1. $M = \{ m ; a ; t ; h ; é ; i ; q ; u ; e ; s \}$ et $P = \{ p ; h ; y ; s ; i ; q ; u ; e \}$.

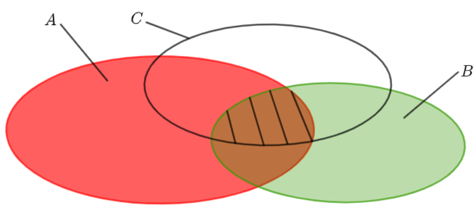
   $M \cap P = \{ h ; s ; i ; q ; u ; e \}$. On a $|M \cup P| = 10 + 8 - 6 = 12$.

2. On a bien $|M \cup C| = |M| + |C|$ car M et C sont des ensembles disjoints.

3. Soit A, B et C trois ensembles.

   (a) La partie hachurée est l'ensemble $(A \cup B) \cap C$ ou l'ensemble $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   (b)

$$
\begin{aligned}
& |A \cup B \cup C| \\
&= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| \\
&\quad -(|(A \cap C)| + |(B \cap C)| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$

Exercice n° 3 : (retour)

Comme les ensembles sont duex à deux disjoints, on a $|\bigcup_{k=1}^{p} E_k| = \sum_{k=1}^{p} |E_k|$ donc

$$|\bigcup_{k=1}^{p} E_k| = \sum_{k=1}^{p} 2k+1 = (1+2\times 1) + (1+2\times 2) + \cdots + (1+2\times p) = 1\times p + 2(1+2+\cdots+p) = p + 2\frac{p(p+1)}{2}$$

donc $|\bigcup_{k=1}^{p} E_k| = (p+1)(p+2)$.

Exercice n° 4 : (retour)

1. D'après le tableau, $|E \times F| = 2 \times 3 = 6$

$F \downarrow \quad E \rightarrow$	a	b	c
b	$(b\ ;\ a)$	$(b\ ;\ b)$	$(b\ ;\ c)$
e	$(e\ ;\ a)$	$(e\ ;\ b)$	$(e\ ;\ c)$

2. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des coordonnées de point repéré dans un plan.
3. Quatre éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{N}^2$: $(0\ ;\ -1)$, $(0\ ;\ -2)$, $(0\ ;\ -3)$ et $(4\ ;\ -11)$.
4. $\emptyset \times \mathbb{N}$ est l'ensemble vide.
5. $(-3\ ;\ \frac{2}{7}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. $\quad (4\ ;\ \pi) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.
6. Soit A, B et E des ensembles. Si ces ensembles sont finis, on a bien $(A \cup B) \times E = (A \times E) \cup (B \times E)$?

Exercice n° 5 : (retour)

1. $|M \times P| = |M| \times |P| = 8 \times 10 = 80$.
2. $|\emptyset \times M| = |\emptyset| \times |M| = 0 \times |M| = 0$. Ce produit cartésien est bien $\emptyset$.
3. $|A \times B| = 56$ et $|A| = 14$ donc, avec $|A \times B| = |A| \times |B|$, il vient $56 = 14 \times |B|$ d'où $|B| = 4$.

Exercice n° 6 : (retour)

1. Un code secret est composé de 4 chiffres. Le premier est non nul, le second est pair, le troisième est impair et le dernier est multiple de 3. Décrire l'ensemble où se trouve un tel quadruplet. Un tel quadruplet appartient à $\{\ 1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ 9\ \} \times \{\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ \} \times \{\ 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ \} \times \{\ 0\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ \}$. Il y a alors $9 \times 4 \times 5 \times 4$ soit 720 codes possibles.
2. On considère ici $\{0\ ;\ 1\}^n$ où $n \geq 1$.
   (a) Le nombre de n-uplets d'éléments pris dans $\{0\ ;\ 1\}$ est 2^n
   (b) Soit $E = \{e_1\ ;\ e_2\ ;\ \cdots\ ;\ e_n\}$, un ensemble à n éléments.
   A chaque n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ on associe une partie A de E de la façon suivante :
   Pour tout entier i entre 1 et n si la $i^{\text{ème}}$ composante est 1 alors $e_i \in A$ sinon $e_i \notin A$
   A chaque partie A de E on associe le n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ S de la façon suivante :
   Pour tout indice i entre 1 et n si $e_i \in A$ alors la $i^{\text{ème}}$ composante de S est 1 sinon, c'est 0.
   Il y a alors autant de n-uplets que de parties dans E donc il y a soit 2^n parties dans E donc $|\mathscr{P}(E)| = 2^n$.
   (c) $\{0\ ;\ 1\}^n$ est l'ensemble des issues dans un schéma de Bernoulli à n épreuves de Bernoulli.
3. On reprend les ensembles de lettres M et P de l'exercice n° 2.1.
   (a) $|M^4| = |M|^4 = 10^4$. On peut faire alors 10000 de mots de 4 lettres avec les lettres du mot mathématiques.

(b) $|P^3|$ dénombre les mots de 3 lettres avec les lettres de l'ensemble P.

(c) Un élément de $P^2 \times M^2$ est mot de quatre lettres : les deux première lettres sont dans P et les deux dernières, dans M.

Un élément de $(P \times M)^2$ est un couple de mots de deux lettres, les premières étant dans P et les dernières, dans M.

(d) On obtient un élément de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ 6\}^5$.

Exercice n° 7 : (retour)

1. Le nombre de repas possibles est $4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2$ soit 192.
2. Les triplets ont leurs éléments distincts deux à deux.

Exercice n° 8 : (retour)

Pris dans $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$,

les arrangements de 2 éléments sont $(a\ ;\ b)$, $(a\ ;\ c)$, $(b\ ;\ c)$, $(b\ ;\ a)$, $(c\ ;\ b)$ et $(c\ ;\ a)$.

les arrangements de 1 sont (a), (b) et (c).

l'arrangement de 0 éléments est ().

Exercice n° 9 : (retour)

1. On a $|E| = 3$ et $3 \times 2 = 6$.
2. Il y a $\mathcal{A}_{13}^3$ de triplets possibles soit $13 \times 12 \times 11 = 1716$.
3. $\mathcal{A}_{100}^1 = 100$, $\mathcal{A}_{100}^2 = 9900$ et $\mathcal{A}_{101}^3 = 999900$.
4. Il y a Il y a $\mathcal{A}_{11}^4$ tirages possibles soit $11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$.
5. $f'(x) = nx^{n-1}$ donc $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

   Pour $k \leq n$, $f^{(k)}(x) = \mathcal{A}_n^k x^{n-k}$ et pour $k > n$, $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout x réel.

Exercice n°10 : (retour)

Avec $E = \{\ R\ ;\ V\ ;\ B\ \}$, les permutations de E sont

$(R\ ;\ V\ ;\ B)$, $(R\ ;\ B\ ;\ V)$, $(V\ ;\ R\ ;\ B)$, $(V\ ;\ B\ ;\ R)$, $(B\ ;\ R\ ;\ V)$ et $(B\ ;\ V\ ;\ R)$.

Il y en a $3 \times 2 = 6$.

Exercice n°11 : (retour)

1. Une telle redistribution correspond à une unique permutation de 8 éléments donc il y en a 8!, soit 40320 redistributions possibles.

2. Soit $n \geq 4$.

$\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$.

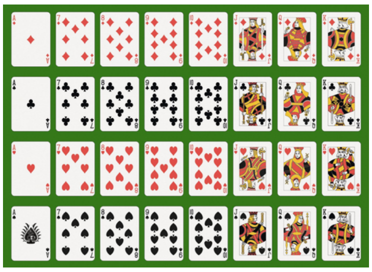
$\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!} = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{n}{(n-1)!n} = \dfrac{1+n}{n!}$.

Exercice n°12 : (retour)

	$\emptyset$	$\{6\,;\,4\}$	$(6\,;\,5)$	$(5\,;\,4\,;\,5)$	$(8\,;\,4\,;\,5)$	5	$\{7\}$	$(7\,;7)$	$(7\,;\,6\,;\,4;\,5)$	$(7\,;\,4\,;\,6)$
Une partie de E	$\times$	$\times$					$\times$			
Un n-uplet de E			$\times$	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$
Un élément de E^3				$\times$						$\times$
Un arrangement de E			$\times$						$\times$	$\times$
Une permutation de E									$\times$	
Un élément de E						$\times$				
Une combinaison de E	$\times$	$\times$					$\times$			

Exercice n°13 : (retour)

1. $\dbinom{45}{3} = \dfrac{45!}{3!42!} = \dfrac{45!}{3!42!} = \dfrac{45\times44\times43\times42!}{3!42!} = \dfrac{45\times44\times43}{3\times2} = 15\times22\times43$ donc $\dbinom{45}{3} = 14190$.
2. $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec $n \geq 3$ et $p \in [0\,;\,1]$ donc $P(X=3) = \dbinom{n}{3}p^k(1-p)^{n-k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}p^k(1-p)^{n-k}$.
3. Une main de cinq cartes tirées d'un jeu de 32 cartes est une combinaison de 5 éléments pris parmi 32. Il y a alors $\dbinom{32}{5} = \dfrac{32!}{5!27!} = \dfrac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2} = 8\times31\times1\times29\times28$ soit 201376.
4. Au poker à 32 cartes, nombre de mains avec une paire de valets.
   (a) $1^{\text{ère}}$ étape : il y a $\dbinom{4}{2} = 6$ façons de choisir une paire de valets.
   (b) $2^{\text{ème}}$ étape : il y a $\dbinom{28}{3}$ façons de choisir 3 cartes parmi les 28 cartes sans valets soit 3276.
   (c) D'après le principe multiplicatif ou d'après la formule sur le cardinal d'un produit d'ensembles, il y a 56×3276 mains avec une paire de valets soit 19656.



5. Nombre de mains avec un full :

   $1^{\text{ère}}$ étape : il y a 8 rangs pour la paire.

   $2^{\text{ème}}$ étape : dans un rang (Roi par exemple), il y a $\dbinom{4}{2} = 6$ façons de choisir une paire.

   $3^{\text{ème}}$ étape : Il n'y a plus que 7 rangs pour le brelan.

   $4^{\text{ème}}$ étape : dans un rang (7 par exemple), il y a $\dbinom{4}{3} = 4$ façons de choisir un brelan.

   On obtient alors $8\times6\times7\times4 = 1344$ mains avec un full au poker.

Exercice n°14 : (retour)

1. Nombre de n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ contenant k "0" où $0 \leq k \leq n$.

   Soit k, un entier entre 0 et n. Obtenir un n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ avec k "0" c'est choisir k composantes parmi n qui seront égale à 0 donc il y a $\binom{n}{k}$ n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ contenant k "0" où $0 \leq k \leq n$.

2. Soit $(a\ ;\ b) \in \mathbb{N}^2$. Nombre de chemins allant de $O(0\ ;\ 0)$ vers $M(a\ ;\ b)$?

   Un tel chemin se modélise par un $(a+b)$-uplets de lettres D ou H contenant a lettres D et b lettres H. De tels chemins ou $(a+b)$-uplets sont, d'après 1., au nombre de $\binom{a+b}{a}$.

3. Nombre de p-uplet $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ;\ x_p)$ de $(\mathbb{N}^*)^p$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$.

   Pour un tel p-uplets, $x_1 + x_2 + \ldots + x_p \geq p$ donc si $n < p$ alors il n'y a pas de tels p-uplets.

   Pour $n \geq p$, sur la droite des réels, plaçons les entiers $0, 1, \ldots, n$.

   Plaçons p entiers (k_i) distincts deux à deux tels que $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_{p-1} \leq k_p = n$ sur cette droite. Il y a alors $\binom{n-1}{p-1}$ tels p-uplets. A chacun de ces p-uplets correspond un unique p-uplet $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \cdots\ ;\ x_p)$ de $(\mathbb{N}^*)^p$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$.

   En effet, il suffit de poser $x_1 = k_1$ et $x_2 = k_2 - k_1$ et $x_3 = k_3 - k_2$ et $\cdots$ et $x_p = k_p - k_{p-1}$.

   En conclusion, le nombre de p-uplet $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ;\ x_p)$ de $(\mathbb{N}^*)^p$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ est égal à 0 si $n < p$ et $\binom{n-1}{p-1}$ sinon.

Exercice n°15 : (retour)

1. Soit x, un réel. Développons $(x+10)^6$.

$$\begin{aligned}(x+10)^6 &= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k \times 10^{6-k} \\ &= \binom{6}{0}x^0 \times 10^6 + \binom{6}{1}x^1 \times 10^5 + \binom{6}{2}x^2 \times 10^4 + \binom{6}{3}x^3 \times 10^3 + \binom{6}{4}x^4 \times 10^2 + \binom{6}{5}x^5 \times 10^1 + \binom{6}{6}x^6 \times 10^0\end{aligned}$$

   donc $(x+10)^6 = 10^6 + 6 \times 10^5 x + 15 \times 10^4 x^2 + 20 \times 10^3 x^3 + 15 \times 10^2 x^4 + 60x^5 + x^6$.

   En pratique, on écrit $\ldots 10^6 + \ldots x \times 10^5 + \ldots x^2 \times 10^4 + \ldots x^3 \times 10^3 + \ldots x^4 \times 10^2 + \ldots x^5 \times 10^1 + \ldots x^6$ et on compète les "$\ldots$" par les coefficients binomiaux de la ligne 6 du tableur : 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 ; 1.

2. Pour $a = 1$ et $b = 1$, d'après la formule de Newton, $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^n 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Preuve combinatoire :

   On sait, d'après l'exercice n°6, 2., il y a 2^n parties ou sous-ensembles dans un ensemble à n éléments. Ces parties sont des combinaisons de k éléments pris parmi n avec k, un entier entre 0 et n. Or il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons k éléments pris parmi n. En additionant le nombre de parties à 0 éléments avec le nombre de parties à 1 éléments,. . . , avec le nombre de parties à n éléments, on obtient le nombre de parties de E, d'où la formule.

3. On a $(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$ donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

   Pour x non nul, $(x+\frac{1}{x})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{x^k}x^{n-k}$ donc $(x+\frac{1}{x})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}$.

4. Dans la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, les puissances de -1 sont égales à 1 ou à -1 selon la parité de k.

   En triant dans la somme, on a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1) = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$

   on a alors $\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} = 0$ donc $\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$.

   Ces deux sommes étant égales, de somme 2^n alors $\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

   On a $\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}\binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

5. Pour tout x réel et tout entier naturel n, on a $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

   En dérivant membre à membre, on a $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

   En particulier pour $x=1$, $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$ d'où l'identité.

Exercice n°16 : (retour)

Soit n, un entier naturel non nul et $E = \{e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n ; f_1 ; f_2 ; \ldots ; f_n\}$ un ensemble à $2n$ éléments.

Soit p, un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

D'une part, on sait que le nombre de parties à p éléments de E est $\binom{2n}{p}$.

D'autre part, l'ensemble des parties de E à p éléments est union disjointe des ensembles de parties qui contiennent (0 élément e_i et p éléments f_i) ou (1 élément e_i et $p-1$ éléments f_i) ou ... ou (p éléments e_i et 0 éléments f_i).

Ces ensembles de parties ont respectivement comme cardinal $\binom{n}{0}\binom{n}{p}, \binom{n}{1}\binom{n}{p-1}, \ldots, \binom{n}{p}\binom{n}{0}$.

Ces deux manières de compter les parties à p éléments de E nous donne $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p}$.

Exercice n°17 : (retour)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit u_n, le nombre de n-uplet de $\{0 ; 1\}^n$ qui ne comportent pas deux "0" consécutifs ?

   On verra si on peut convenir que le 0-uplet vide vérifie la contrainte. Dans ce cas, $u_0 = 1$.

   (0) et (1) sont les 1-uplets vérifiant la contrainte donc $u_1 = 2$.

$(0\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 1)$ sont les couples vérifiant la contrainte donc $u_2 = 3$.

A un rang n quelconque, parmi les u_{n+2} $(n+2)$-uplets, il y a, de manière disjointe,

- les $(n+2)$-uplets qui se terminent par 1 et il y en a u_{n+1}.
- les $(n+2)$-uplets qui se terminent par 0 et donc elles se terminent par 1 et 0. Il y en a u_n.

On a alors $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On a, pour l'instant, qu'un calcul par récurrence du nombre des ces n-uplets. On peut obtenir le terme général, mais c'est plus compliqué.

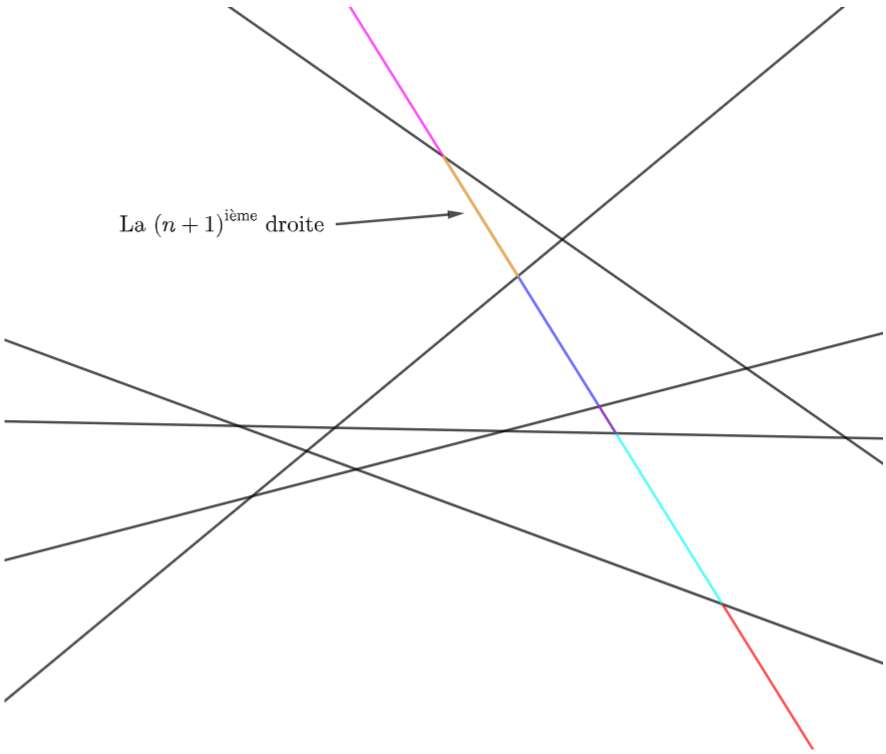
2. Soit u_n, le nombre de façons de monter un escalier à n marches avec un pas de 1 ou 2 marches.

   Parmi les u_{n+2} montées de $n+2$ marches, il y a, de manière disjointe,

   - les montées qui se terminent par 1 pas et il y en a u_{n+1}.
   - les montées qui se terminent par 2 pas et il y en a u_n.

   On a alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

3. Soit u_n, le nombre de régions du plan formées par n droites.



Une $(n+1)^{\text{ième}}$ droite, tracée selon les contraintes, va rencontrer les n droites précédentes en n points distincts deux à deux.

Sur cette droite chacun des segments consécutifs coupent en deux une région précédente donc chacun de ces $n+1$ segments créée une nouvelle région.

On a alors $u_{n+1} = u_n + n + 1$ avec $u_1 = 2$.

$u_n = u_{n-1} + n = u_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = u_1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = 2 + 2 + \cdots + (n-1) + n = 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = 1 + \dfrac{(n)(n+1)}{2}$.

Pour n droites il y $\dfrac{n(n+1)+2}{2}$ régions du plan formées.

4. Soit u_n, le nombre de permutations $(a_1\ ;\ a_2\ ;\ \ldots\ ;\ a_n)$ de l'ensemble $E_n = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ tels qu'il existe un unique indice i entre 1 et $n-1$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$.

   Pour $n = 0$ ou $n = 1$, de telles permutations ne sont pas définies.

   Pour $n = 2$, seule la permutation $(2\ ;\ 1)$ convient donc $u_2 = 1$.

   Pour $n = 3$, il y a $(1\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $(2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $(3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ donc $u_3 = 4$.

   Pour obtenir de telles permutations de l'ensemble $E_{n+1} = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\ ;\ n+1\}$, il faut considérer, de manière disjointe,

   - celles qui se terminent par $a_{n+1} = n+1$ et la compléter en amont par une permutation de E_n tels qu'il existe un unique indice i entre 1 et $n-1$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$. Il y en a u_n.
   - celles telles qu'il existe i de E_n tel que $a_i = n+1$. On complète alors à gauche par les éléments croissants d'une combinaison de $i-1$ éléments parmi les n éléments de E_n et à droite par les éléments croissants restants. Ceci se fait de $\dbinom{n}{i-1}$ manières.

$$(\underbrace{a_1\ ;\ a_2\ ;\ \cdots\cdots\ ;\ a_{i-1}}_{i-1 \text{ entiers croissants de } E_n}\ ;\ n+1\ ;\ \underbrace{a_{i+1}\ ;\ a_{i+1}\ ;\ \cdots\ ;\ a_{n+1}}_{\text{entiers croissants restants}}).$$

   Pour une telle permutation, la contrainte est bien réalisée une seule fois avec $n+1 = a_i > a_{i+1}$.

   On en déduit que $u_{n+1} = u_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}$.

   Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i} = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right) - \binom{n}{n} = 2^n - 1$.

   On a alors $u_{n+1} = u_n + 2^n - 1$, pour tout entier naturel.

   $u_n = u_{n-1} + 2^{n-1} - 1 = u_{n-2} + 2^{n-2} - 1 + 2^{n-1} - 1 = u_{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} - 2 = u_{n-3} + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} - 3 = \cdots$

   $= u_2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} - (n-2)$.

   Or $2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} - 1 + 2^{n-1} = -3 + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}) = -3 + 2^n - 1 = 2^n - 4$ en appliquant une formule sur la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

   On en déduit que $u_n = 1 + (2^n - 4) - (n-2) = 2^n - n - 1$.