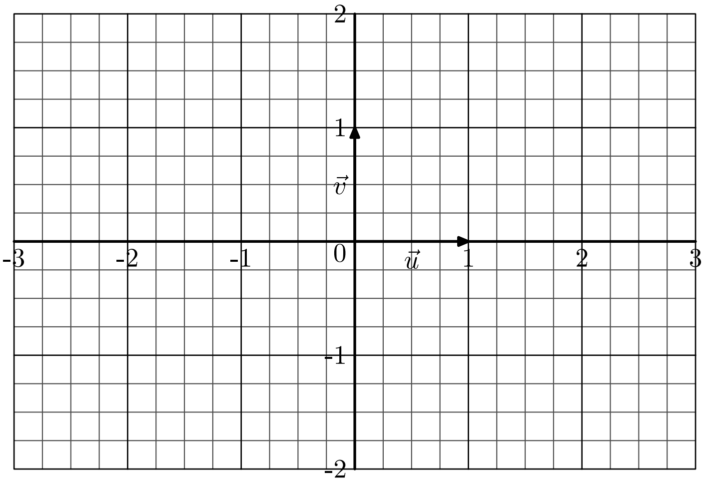
TD complexes arguments

Exercice 1

definition : On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
Pour tout nombre complexe z appartenant à $\mathbb{U}$, on appelle **argument de z** la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ où M est l'image du point z.

1. Dans la représentation ci-dessous du plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, placer les points M_1, M_2, M_3 appartenant au cercle trigonométrique et dont les arguments respectifs des affixes de ces points ont pour valeurs :

   a. $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ b. $\theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ c. $\theta_3 - \dfrac{2\pi}{3}$

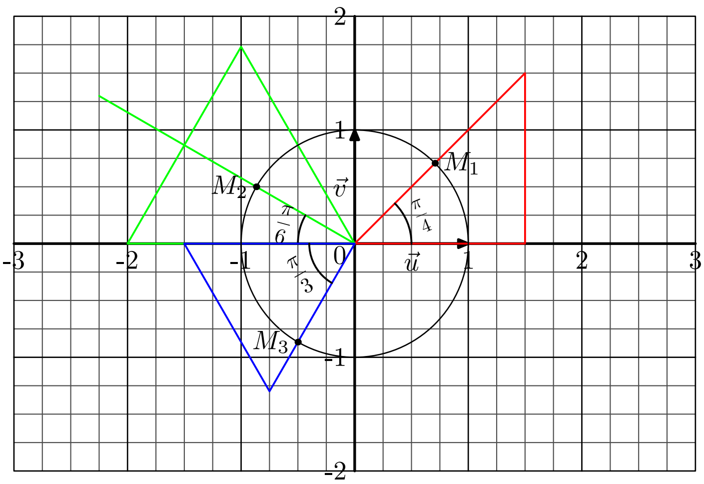


Proposition : dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. Le point M appartenant au cercle trigonométrique dont l'affixe z a pour argment θ admet pour écriture algébrique :
$z = \cos\theta + \text{i}\cdot\sin\theta$

2. Donner les écritures algébriques des affixes des points M_1, M_2, M_3 définis à la question 1..

Correction 1

1. Voici la représentation de ces trois points :



Voici les outils géométriques pour placer ces points :

- l'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure des angles de la base principale d'un triangle isocèle rectangle.
- l'angle $\dfrac{5\pi}{6}$ est l'angle complémentaire de l'angle de mesure $\dfrac{\pi}{6}$.
  La bissectrice d'un des angles d'un triangle équilatéral a pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$.
- l'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est l'angle complémentaire d'un angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui est la mesure de chacun des angles d'un triangle équilatéral.

2. - L'affixe z_1 du point M_1 a pour écriture algébrique :
$$z_1 = \cos\theta_1 + \text{i}\cdot\sin\theta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   - L'affixe z_2 du point M_2 a pour écriture algébrique :
$$z_2 = \cos\theta_2 + \text{i}\cdot\sin\theta_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\cdot\frac{1}{2}$$
   - L'affixe z_3 du point M_3 a pour écriture algébrique :
$$z_3 = \cos\theta_3 + \text{i}\cdot\sin\theta_3 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} - \text{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2

Définition : on considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
Soit z un nombre complexe non-nul, on appelle **argument de** z la valeur de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$

Déterminer les arguments des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = 1 + \text{i}$ b. $z_2 = -3 + 3\cdot\sqrt{3}\cdot\text{i}$ c. $z_3 = \sqrt{3} - \text{i}$

Correction 2

a. $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$$\Longrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'argument θ_1 du nombre complexe $\dfrac{z_1}{|z_1|}$ vérifie :
$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'après les angles remarquables, on en déduit l'argument du nombre complexe z_1 : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$

b. $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+9\times 3} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$
$$\Longrightarrow \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{-3+3\sqrt{3}\cdot}{6} = \frac{-3}{6} + \text{i}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{2} + \text{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument θ_2 du nombre complexe $\dfrac{z_2}{|z_2|}$ vérifie :

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

D'après les angles remarquables, on en déduit l'argument du nombre complexe z_1 : $\theta_2 = \dfrac{2\cdot\pi}{3}$

c. $|z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$$\Longrightarrow \frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}$$

L'argument θ_3 du nombre complexe $\dfrac{z_3}{|z_3|}$ vérifie :

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

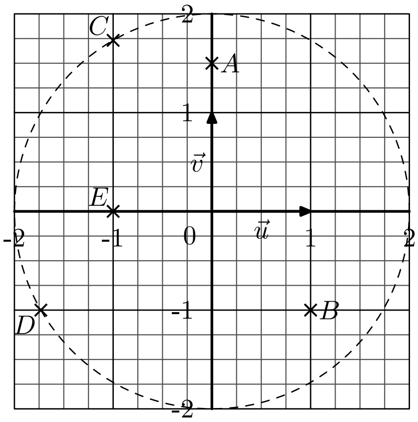
D'après les angles remarquables, on en déduit l'argument du nombre complexe z_3 : $\theta_3 = -\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 3*

Interprétation géométrique : dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, pour tout point M différent de O. L'argument de l'affixe du point M a pour valeur la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthormé direct représenté ci-dessous :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 est représenté en pointillé ; les points C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.



1. Déterminer les modules et les arguments des affixes des points A, B, C, D et E.

2. Placer les points F et G d'affixes respectives z et z' vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \;;\; \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Correction 3

1. L'affixe des points A, B et E ont respectivement pour écriture algébrique :

$z_A = \dfrac{3}{2}\cdot\mathrm{i}$; $z_B = 1 - \mathrm{i}$; $z_E = -1$

On remarque facilement que :

- $|z_A| = \dfrac{3}{2}$; $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{2}$
- $|z_E| = 1$; $\arg(z_E) = -\pi$
- $|z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{4}$

Etudions particulièment les points C et D. On utilisera le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

- Le point C appartient au cercle de centre O, de rayon 2 et son abscisse vaut -1. Ainsi, l'affixe z_c du point C a pour propriétés : $|z_C| = 2$; $Re(z_C) = -1$

  Notons $z_C = a + \mathrm{i}\cdot b$ l'écriture algébrique de z_C et puisque z_C est non-nul, notons θ son argument. On obtient le système suivant :

  $$\begin{cases} a = 2\cdot\cos\theta \\ b = 2\cdot\sin\theta \end{cases}$$

  On en déduit l'égalité :

  $-1 = 2\cdot\cos\theta$

  $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

  $\cos\theta = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

  On en déduit les deux possibilités pour l'angle θ :

  $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$; $\theta = -\dfrac{2\cdot\pi}{3}$

  Graphiquement, on en déduit l'argument de l'affixe du point C : $\theta = \dfrac{2\cdot\pi}{3}$

- Graphiquement, on obtient les propriétés de l'affixe z_D du point D :

  $|z_D| = 2$; $Im(z_D) = -1$

  Notons $a + \mathrm{i}\cdot b$ l'écriture algébrique de z_D et puisque z_D est non-nul, notons θ l'argument de z_D. On en déduit le système d'équation suivant :

  $$\begin{cases} a = 2\cdot\cos\theta \\ -1 = 2\cdot\sin\theta \end{cases}$$

  On en déduit l'équation suivante :

  $-1 = 2\cdot\sin\theta$

  $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$

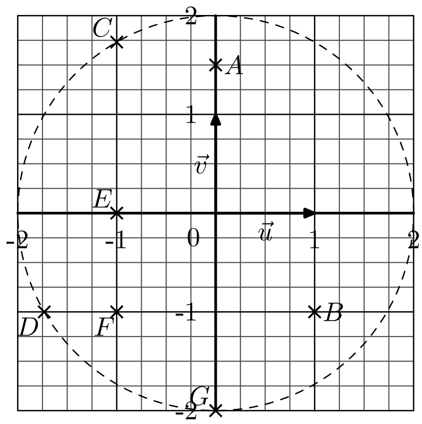
  $\sin\theta = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

  Les deux valeurs possibles pour la valeur de θ sont :

  $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$; $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$

  Graphiquement, on en déduit que : $\arg(z_D) = -\dfrac{5\pi}{6}$

2. Voici la représentation des points F et G dans ce repère :



Exercice 4

Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes z_5 et z_6 non-nuls définis par :

a. $|z_5| = 5 \quad ; \quad \arg(z_5) = -\frac{\pi}{3}$

b. $|z_6| = 2 \quad ; \quad \arg(z_6) = -\frac{\pi}{2}$

Correction 4

a. En notant respectivement r_5 et θ_5, le module et un argument du nombre complexe z_5, ce nombre complexe admet pour écriture trigonométrique :

$$z_5 = r\cdot\Big(\cos\theta_5 + \mathrm{i}\cdot\sin\theta_5\Big) = 5\cdot\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\cdot\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big]$$

$$= 5\cdot\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\mathrm{i}\Big) = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\mathrm{i}$$

b. En notant respectivement r_6 et θ_6, le module et un argument du nombre complexe z_6, on a :

$$z_6 = r_6\cdot\Big(\cos\theta_6 + \mathrm{i}\cdot\sin\theta_6\Big) = 2\cdot\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \mathrm{i}\cdot\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]$$

$$= 2\cdot\Big(0 - 1\cdot\mathrm{i}\Big) = -2\cdot\mathrm{i}$$

Exercice 5*

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

c. $z_3 = -1 - \mathrm{i}$

d. $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

Correction 5

a. Le module du complexe z_1 a pour valeur :

$$\big|z_1\big| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Le nombre complexe z_1 étant non-nul, il admet une écriture trigonométrique qui s'obtient en mettant en facteur son module :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\Big(\frac{-1}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

En notant θ_1 l'argument du nombre complexe z_1 :

$$= \big|z_1\big|\cdot\big(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\cdot\sin\theta_1\big)$$

Par identification des deux écritures trigonométriques du nombre z_1, on en déduit que l'argument θ_1 doit vérifier les deux équations suivantes :

$$\cos\theta_1 = \frac{-1}{2} \quad ; \quad \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De la première équation, faisant intervenir le cosinus, on obtient deux valeurs possibles pour l'argument θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{2\cdot\pi}{3} \quad ; \quad \theta_1 = -\frac{2\cdot\pi}{3}$$

La seconde équation montre que le sinus de l'argument θ_1 vérifie :

$$\sin\theta_1 > 0$$

On en déduit la valeur : $\theta_1 = \frac{2\cdot\pi}{3}$

Ainsi, le nombre complexe z_1 admet pour écriture trigonométrique :

$$z_1 = 1\cdot\Big(\cos\frac{2\cdot\pi}{3} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{3}\Big)$$

b. Le module du complexe z_2 a pour valeur :

$$\big|z_1\big| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\big(\sqrt{3}\big)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Le nombre complexe z_2 étant non-nul, il admet une écriture trigonométrique qui s'obtient en mettant en facteur son module :

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\Big)$$

En notant θ_2 l'argument du nombre complexe z_2 :

$$= \big|z_2\big|\cdot\big(\cos\theta_2 + i\cdot\sin\theta_2\big)$$

Par identification des deux écritures trigonométriques du nombre z_2, on en déduit que l'argument θ_2 doit vérifier les deux équations suivantes :

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{2}$$

De la première équation, faisant intervenir le cosinus, on obtient deux valeurs possibles pour l'argument θ_2 :

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$$

La seconde équation montre que le sinus de l'argument θ_2 vérifie :

$$\sin\theta_2 > 0$$

On en déduit la valeur de $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$

Ainsi, le nombre complexe z_2 admet pour écriture trigonométrique :

$$z_2 = 2\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\Big)$$

c. Le module du complexe z_3 a pour valeur :

$$\big|z_3\big| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\big(-1\big)^2 + \big(-1\big)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Le nombre complexe z_3 étant non-nul, il admet une écriture trigonométrique qui s'obtient en mettant en facteur son module :

$$z_3 = -1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\cdot\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}\Big)$$

En notant θ_3 l'argument du nombre complexe z_3 :

$$= \big|z_3\big|\cdot\big(\cos\theta_3 + \mathrm{i}\cdot\sin\theta_3\big)$$

Par identification des deux écritures trigonométriques du nombre z_3, on en déduit que l'argument θ_3 doit vérifier les deux équations suivantes :

$$\cos\theta_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

De la première équation, faisant intervenir le cosinus, on obtient deux valeurs possibles pour l'argument θ_3 :

$$\theta_3 = \frac{3\cdot\pi}{4} \quad ; \quad \theta_3 = -\frac{3\cdot\pi}{4}$$

La seconde équation montre que le sinus de l'argument θ_3 vérifie :

$$\sin\theta_3 > 0$$

On en déduit la valeur de $\theta_3 = -\frac{3\cdot\pi}{4}$

Ainsi, le nombre complexe z_3 admet pour écriture trigonométrique :

$$z_3 = \sqrt{2}\cdot\Big[\cos\Big(-\frac{3\cdot\pi}{4}\Big) + \mathrm{i}\cdot\sin\Big(-\frac{3\cdot\pi}{4}\Big)\Big]$$

d. Le module du complexe z_4 a pour valeur :

$\left|z_4\right| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Le nombre complexe z_4 étant non-nul, il admet une écriture trigonométrique qui s'obtient en mettant en facteur son module :

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En notant θ_4 l'argument du nombre complexe z_4 :

$= \left|z_4\right|\cdot\left(\cos\theta_4 + \mathrm{i}\cdot\sin\theta_4\right)$

Par identification des deux écritures trigonométriques du nombre z_4, on en déduit que l'argument θ_4 doit vérifier les deux équations suivantes :

$\cos\theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

De la première équation, faisant intervenir le cosinus, on obtient deux valeurs possibles pour l'argument θ_4 :

$\theta_4 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{4}$

La seconde équation montre que le sinus de l'argument θ_4 vérifie :

$\sin\theta_4 > 0$

On en déduit la valeur de $\theta_4 = \frac{\pi}{4}$

Ainsi, le nombre complexe z_4 admet pour écriture trigonométrique :

$z_4 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$